MARINI GHETALDI PATRITII RAGVSINI,

VARIORVM PROBLEMATVM COLLECTIO.

CVM PRIVILEGIIS.



VENETIIS,

Apud Vincentium Fiorinam.

M DC VII.

86 /
Bib. Soc. Coll.
Rom. Soc. J.
BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE
BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

VIRO

ILLVSTRI

MARINO

GOZIO,

PATRITIO

RAGVSINO

Marinus Ghetaldus S. P. D.

H*ESIODVS Scriptor ſanè iuxta antiquus, ac nobilis, in referenda gratia imitari nos iubet agros fertiles, qui plus multo afferunt quàm acceperunt. Ego Marine ſi voluntati reſponderet facultas, feraces agros non imitarer modo, verum etiam ſuperarem. Enimuerò ingenij mei quaſi ager haud ſcio, an potiorem quam te colonum agnoſcat, qui dum me patria corporis verius alumna, quam animi, in alienas terras ingeniorum altrices vnà tecum extraxiſti, quaſi coluiſti agrum, quam autem gentem ad Doctorum multiplicitatem ſex annis vna peregrinati non adiuimus? Superiorem Germaniam omnem percurrimus: inferiorem totam,*

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

Belgiumque luſtrauimus: duos annos conſedimus in Britania: Galliam deinde peragrauimus, & Italiam vniuerſam, quas inter gentes, quot ego Doctores nactus ſum (nactus autem ſum plures) tot agro tu quaſi præfeciſti operarios. Accipe igitur ex culto agello, eo quo tibi offertur ſtudio, huius anni fructum (præteritorum enim ideo non obtuli, quia fructus dare tibi nolui niſi prægustatos probatosque) qui ſi fortè minor eſt ſemente, totus eſt certè quem meſſui: talisque qui à Domino omnibus Reipublicæ noſtræ muneribus perfuncto ſuam mutuabitur amplitudinem, ſuum decus.

Vale. Raguſij 13. Kal. Iunij M DCVI.

MARINI

GHETALDI VARIORVM PROBLEMATVM COLECTIO.

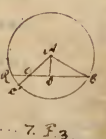
INTER Problemata, quæ conſtruere aggredior, ſunt quædam Ioannis Regiomontani, quorum Geometricam conſtructionē ipſe non exhibet, quamuis ea Algebrice, vel per ſinus explicet. At problemata, quæ Algebrice explicari poſſunt, dummodo quadratorum metam æquationes nō excedant, poſſunt quoq; & Geometrica ratione cōſtrui, qua methodo, quave ratione in librò de reſolutione, & cōpoſitione abunde explicabimus. Interim problemata illa Regiomōtani Geometrice conſtruā, quæ vt ab alijs dignoſcantur, erunt in margine notata, reliqua verò partim à Clauio, & Griembergerio, quorum in Mathematicis diſciplinis præſtantiam nemo non nouit, nemo non admiratur, partim à Iacobo Reſtio, cuius breui aliquid illuceſcet ingenij, mihi propoſita fuerunt ad conſtruendum, partim à me ipſo excogitata.

Perpendicularis trianguli vocatur ea recta linea, quæ ab angulo verticis cadit in baſim ad rectos angulos.

Segmenta baſis dicuntur ea quæ fiunt à perpendiculari.

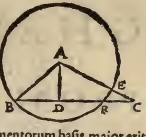
LEMMA I.

DIFFERENTIA ſegmentorum baſis trianguli maior eſt quam laterum differentia.



Exponatur enim triangulum ABC, in quo perpendicularis AD ſecet baſim in duo ſegmenta BD, DC, & centro A, interuallo

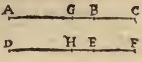
uallo AB, quod ſit latus minus, deſcribatur circulus BFE ſecans latus AC in E, baſim verò BC, in F, eſt igitur laterum AB, AC, differentia EC, differentia verò ſegmentorum BD, DC, ipſa FC ſunt
3. Tertij. * enim BD, DF æquales, & quoniam AC ad centrum pertingit,
8. Tertij. ipſius pars exterior EC minima * erit incidentium circulo ab eodẽ C puncto; quare FC differentia ſegmentorum baſis, maior erit quam EC, differentia laterum, quod erat oſtendendum.



LEMMA II.

Si duo rectangula fuerĩt æqualia, fuerint autem & quadrata laterum primi, æqualia quadratis laterum ſecundi, latera primi lateribus ſecundi æqualia erunt, maius videlicet maiori, minus minori.

Sit rectangulum ABC æquale rectangulo DEF, & quadrata AB, BC, ſimul ſumpta æqualia quadratis DE EF ſimul ſumptis. Dico rectas AB, BC rectis DE EF æquales eſſe, maiorem videlicet maiori, minorem minori.



Quoniam enim quadrata AB, BC æqualia ſunt quadratis DE, EF, & rectangulum ABC æquale rectangulo DEF, quadrata AB, BC, vna cum rectãgulo ABC æqualia erunt quadratis DE, EF, vna cum rectangulo DEF, duplicentur rectangula ABC. DEF, quadrata igitur AB, BC, vna
4. Secūdi. cum duplo rectanguli ABC hoc eſt * quadratum AC, æquale
4. Secūdi. erit quadratis DE EF, vna cum duplo rectanguli DEF, hoc * eſt quadrato DF, quare & recta AC æqualis erit rectæ DF. Iam ſecentur ipſæ AC, DF, biſariam in G, & H, erunt igitur AG, DH,
5. Secūdi. æquales, & æqualia quoque earum quadrata, ſed quadratum * AG æquale eſt rectangulo ABC, vnà cum quadrato GB, & quadratum * DH æquale rectangulo DEF, vnà cum quadrato HE,
5. Secūdi. rectangulum igitur ABC, vnà cum quadrato GB æquale erit

rectan

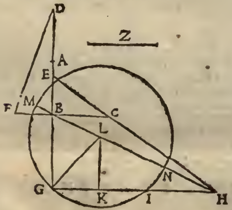
rectangulo DEF, vnà cum quadrato HE, auferantur æqualia rectangula ABC DEF, reliquum igitur quadratum GB, reliquo quadrato HE æquale erit, vnde & recta GB æqualis rectæ HE, quare per additionem, & ſubductionem æqualium æqualibus erit AB æqualis DE, & reliqua BC æqualis reliquæ EF, quod erat oſtendendum.

Problema I.

DATA perpendiculari, differentia laterum trianguli, & differentia ſegmentorum baſis, inuenire triangulum.

Sit data perpendicularis trianguli AB, differentia laterum BC, & differētia ſegmentorum baſis, Z, oportet inuenire triangulum. Inclinentur ad rectos angulos AB, BC, ipſaque BA duplicetur in D, in & in ea ponatur CE ęqualis Z, eſt autē ipſa Z, ex antecedēte, quod primo loco præmiſſum eſt Lēmate, maior quam BC, deinde pducat̄ CB in F, vt ſit BF ęqualis BE, & iūgatur FD, & pducat̄ quoque AB in G, vt ſit EG æqualis DF, ipſi autem BC parallela agat̄ GH, ſecans EC continuatā in H, & in ea ſumatur HI æqualis EC, reliqua verò IG ſecetur bifariam, & ad rectos angulos in K a recta linea KL æquali ipſi BA, & iungantur GL, LH, in triãgulo igitur LGH perpendicularis LK ęqualis eſt AB ex conſtructione, & IH differentia ſegmentorũ GK, KH ęqualis EC, hoc eſt ipſi Z. Supereſt igitur, vt differentia laterum

Prob. 23. lib. ſecundi de triãgulis Regiomontani.



terum LG,LH æquetur ipſi BC, id autem ita fiet manifeſtum.

Centro L,interuallo LG,deſcribatur circulus ſecãs rectam HL,continuatam in punctis M , N , differentia igitur laterum
8. Tertij. LG,LH erit NH,& circulus MGN tranſibit per I, ſunt * enim GK,KI æquales,& LK perpendicularis eſt ipſi GI.

Quoniam igitur MH ſecta eſt in N,quadrata MH,HN æqua-
7. Secũdi. lia * erunt duplo rectãguli MHN,vnà cum quadrato MN, hoc eſt vnà cum quadruplo quadrati LG , diameter enim MN dupla eſt LG ſemidiametri,ſed duplum rectanguli MHN,æquale eſt duplo rectanguli GHI , & quadruplum quadrati LG,ęquale quadruplo quadratorum GK,LK,hoc eſt quadratis GI,DB, ſunt enim GI,DB ipſarum GK,LK duplæ, ergo quadrata MH, HN æqualia erunt quadratis GI,DB,vna cum duplo rectangu-
7. Secũdi. li GHI,ſed quadratum GI vnà cum duplo rectanguli GHI,* æquale eſt quadratis GH,IH,hoc eſt GH,EC:quadrata igit̃ MH, HN quadratis GH, EC, DB æqualia erunt , ſed quadrato EC æqualia sũt quadrata EB,BC,hoc eſt FB,BC,ergo quadratis MH NH,quadrata GH,DB,BC,FB ęqualia erunt,quadratis aũt DB, FB æquatur quadratũ DF,hoc eſt EG,ergo quadrata MH,NH æqualia erũt quadratjs GH, BC , EG, ſed quadratis EG, GH æquatur quadratum EH,ergo quadratis MH,NH æqualia erunt quadrata EH,BC.

Et quoniam ratione parallelarum BC,GH,eſt vt EH ad GH, ita EC,ideſt IH ad BC,rectãgulum EH BC ſub extremis æquale erit rectangulo GHI ſub medijs, hoc eſt rectangulo MHN , ſed & quadrata EH,BC oſtẽſa ſunt ęqualia qqadratis MH,NH, ergo ex antecedente,quod ſecundo loco præmiſſum eſt Lemmate,recta MH ipſi EH erit æquali, & NH ipſi BC, quod erat oſtendendum. Conſtructum eſt igitur triangulum LGH in quo perpendicularis LK æqualis eſt AB, ipſa verò NH differentia laterum,æqualis BC,ac denique IH differentia ſegmentorum baſis,æqualis Z,quod erat faciendum.

CONSECTARIVM.

Itaque erit vt recta, quę poteſt differẽtiam quadratorum ex differentijs laterũ videlicet,& ſegmentorum baſis, ad rectam; quæ poteſt quadratum perpendicularis duplæ, & prædictam quadratorum differentiam, ita differẽtia laterum ab baſim, & ita differentia ſegmentorum baſis ad laterum aggregatum.

Eſt enim vt EB ad EG,hoc eſt ad DF,ita BC, vel NH ad GH,

&

& ita EC,ſeu IH ad EH, hoc eſt ad MH,cui æqualis eſt compoſita ex GL,LH.

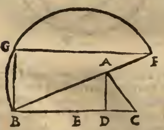
In numeris ſit LK 20, NH 27, IH 33, erit GH 63, compoſita ex GL, LH 77, vnde LG 25, LH 52.

Eſt enim vt L 360, ad L 1960, ideſt vt L 9, ad L 49, ſeu 3, ad 7, ita 27, ad 63, & ita 33, ad 77.

LEMMA. 3

RECTA quæ poteſt quadratum compoſitæ ex lateribus trianguli, minus quadrato differentiæ ſegmentorum baſis, maior eſt perpendiculari dupla.

Sit triangulum ABC, in quo perpendicularis A D, ſecet baſim B C in duo ſegmenta inæqualia B D. DC, quorum differentia ſit B E, & continuetur BA in F, longitudine A C, erit igitur BF compoſitæ ex lateribus B A, AC, æqualis, itaque in ipſa BF, deſcribatur ſemicirculus BGF, in quo accõmodetur BG æqualis BE, & conectatur GF, recta igitur GF poterit quadratũ B F, compoſitæ ex lateribus, minus quadrato G B, hoc eſt BE differentiæ ſegmentorum baſis: angulus enim BGF in ſemicirculo rectus eſt. Dico ipſam GF maiorem eſſe dupla perpendiculari AD. Quoniam enim quadratum BF conſtat quadratis B A, A F, & duplo rectanguli B A F, duplum verò rectanguli B A F, maius eſt duplo quadrati AD, nam vtraque ipſarum B A, A F maior eſt ipſa AD, quadrata quoque BA, AF ſimul maiora ſunt duplo quadrati AD, pro quãtitate quadratorum BD, DC: quadratũ igitur BF quadruplo quadrati AD multo maius erit, quam pro quantitate quadratorum BD, DC, ſed quadratũ BF maius eſt quadrato GF, pro quãtitate quadrati GB tantum, hoc eſt BE, ergo quadratum G F, maius erit quadruplo quadrati AD, hoc eſt quadrato AD duplæ, quare & GF maior erit, quam AD dupla, quod erat oſtendendum.

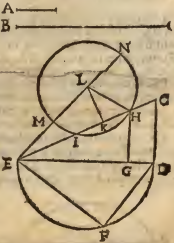


Problema II.

Regiomontani ut refert Vieta, qui eandem ſoluit.

DATA *perpendiculari, aggregato laterum trianguli, & differentia ſegmentorum baſis, inuenire triangulum.*

Sit data perpendicularis trianguli A, aggregatum laterum B, & differentia ſegmentorū baſis CD. Oportet inuenire triangulum: à puncto D, ipſi CD ducatur perpendicularis DE, & in ea ponatur CE æqualis ipſi B, & deſcribatur ſemicirculus EFD, in quo accōmodetur DF, ęqualis duplę ipſius A, hoc autem fieri poteſt, nam ex antecedēte Lemmate, ED maior eſt quam A dupla, conectatur igitur EF, cui æqualis ponatur EG, ipſi autem DC parallela agatur GH, ſecans EC in H, & ponatur EI æqualis CD, reliqua verò IH ſecetur bifariam, & ad rectos angulos in K à recta KL æquali ipſi A, & conectantur EL, LH, & centro L, interuallo LH, deſcribatꝰ circulus HMN, ſecans EL productā in punctis M, N. Quoniam igitur ex L centro cadit in IH perpendicularis



LK ſecans ipſam IH bifariam, circulus cuius centrum L tranſiens per H, tranſibit & per I. Et quoniam ſecta eſt EN in M, 7. Secūdi. quadrata EM, EN *æqualia erunt duplo rectanguli MEN vnà cum quadrato MN, hoc eſt cum quadruplo quadrati LH, diameter enim MN dupla eſt LH ſemidiametri, ſed duplum rectanguli MEN æquale eſt duplo rectanguli IEH, & quadruplum quadrati LH æquale quadruplo quadratorum LK KH hoc eſt quadratis DF, IH, ſunt enim DF, IH ipſarum LK. KH duplæ

duplæ, ergo quadrata EM, EN æqualia erunt quadratis DF, IH, vna cum duplo rectanguli IEH: quadrato autem IH, vnà cum duplo rectanguli IEH, * æqualia ſunt quadrata EI, EH, hoc eſt CD, EH, quadratis igitur EM, EN, quadrata DF, EH, CD æqualia erunt, ſed quadrato EH æqualia ſunt quadrata HG, EG, hoc eſt HG, EF, ergo quadratis EM, EN æqualia erunt quadrata DF, CD, HG, EF, at quadrata DF, EF æqualia ſunt quadrato ED, quadrata igitur EM, EN æqualia erunt quadratis ED, CD, HG, ſed quadrata ED, CD quadrato EC ſunt æqualia, ergo quadrata EM, EN quadratis HG, EC, æqualia erunt. 7. Secūdi.

Et quoniam propter parallelas CD, HG eſt EH, ad HG ſicut EC, ad CD, hoc eſt ad EI, rectangulum IEH ſub extremis, hoc eſt MEN æquale erit rectangulo ECHG ſub medijs, ſed & quadrata EM, EN oſtenſa ſunt æqualia quadratis HG, EC, ergo ex Lemmate 2, quod primo Problemati præmiſſum eſt recta EM æqualis erit ipſi HG, & EN compoſita videlicet ex lateribus EL, LH æqualis EC, hoc eſt ipſi B, eſt autem & perpendicularis LK æqualis ipſi A ex conſtructione, & EI differentia ſegmentorum EK, KH, æqualis CD. Conſtructum eſt igitur triangulum ELH, quale conſtruendum proponebatur.

CONSECTARIVM.

Itaque erit vt recta quæ poteſt quadratum compoſitæ ex lateribus trianguli, minus quadrato differentiæ ſegmentorū baſis, ad rectam quæ poteſt quadratum prædictæ compoſitæ, minus quadratis, quæ fiunt ex differentia ſegmentorum baſis, & perpendiculari dupla, ita compoſita ex lateribus ad baſim, & ita differentia ſegmentorum baſis ad laterum differentiam.

Eſt enim vt ED ad EG, hoc eſt ad EF, ita EC, vel EN, cui æqualis eſt compoſita ex EL, LH, ad EH, & ita CD hoc eſt EI, ad HG, hoc eſt ad EM.

Sit LK 20, cōpoſita ex EL, LH 77, EI 33, erit EH 63, EM 27, vnde EL 52, LH 25.

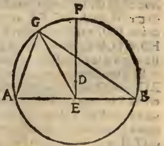
Eſt enim vt L 4840, ad L 3240, ideſt vt L 121, ad L 81, ſeu quod idem eſt vt 11, ad 9, ita 77, ad 63, & ita 33, ad 27.

LEMMA 4.

Si ab angulo verticis trianguli ducta recta linea ſecuerit bifariam baſim, & angulus verticis fuerit acutus, illa recta linea

ſecans maior erit quam dimidia baſis, non autem quam pars diametri circuli circa triangulum deſcripti, ea ſcilicet quæ in portione in qua eſt triangulum, comprehenditur. Si verò angulus verticis fuerit obtuſus, illa ſecans minor erit dimidia baſe, non autem prædicta diametri parte.

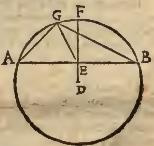
Cadat ab angulo verticis triãguli AGB recta linea GE ſecãs baſim AB bifariam in E, & circa triangulum AGB circulus deſcribatur, cuius centrum ſit D & iuncta ED producatur ad circumferentiam in F. Dico exiſtente angulo AGB acuto, ipſam GE maiorem eſſe quam AE, non autem quam EF. Contrà verò exiſtẽte angulo AGB obtuſo, ipſam GE minorem eſſe quam AE, non autem quam EF. Sit primum angulus AGB acutus, ergo portio circuli AGB maior erit ſemicirculo, & centrũ erit inter E, F, maior * igitur erit EG quam AE, minor verò quam EF, pars videlicet diametri circuli, quæ in portione AGB comprehenditur. Si verò punctum G ſit idem quod F, erit GE æqualis ipſi FE, immo eadem, non autem maior.



7. Tertij.

Deinde ſit angulus AGB obtuſus, erit igitur portio circuli AGB minor ſemicirculo, & centrum D erit extra lineã FE, itaque GE * minor erit quam AE, maior verò quam FE, at ſi punctum G fuerit idem quod F, erit GE æqualis ipſi FE, immo eadem, non autem minor, quare conſtat propoſitum.

7. Tertij.



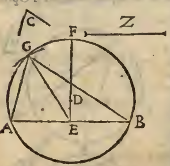
Problema III.

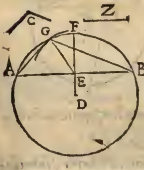
29. lib. 2. de triangulis Regiomõtãi.

DATA baſe trianguli, & angulo verticis, dataque recta linea, quæ à dato angulo ducta ſecat baſim bifariam, inuenire triangulum.

Sit

Sit data baſis trianguli AB, datus quoq; angulus ad verticem æqualis angulo C, ac data denique recta linea, quæ à dato angulo ducta ſecat baſim bifariam, ſit Z, oportet inuenire triangulum. Secetur AB bifariam in E, & in ea deſcribatur portio circuli AGB, quæ ſuſcipiat angulum æqualem angulo C, & per punctum E, & centrũ circuli, quod ſit D, ducatur recta linea EDF vſque ad circumferentiam portionis. Si igitur angulus C fuerit acutus, ex antecedente Lemmate erit Z, maior quam AE, non autem quã FE, ſi verò obtuſus, ipſa Z minor erit quam AE, non autem quam FE, quocunque igitur caſu circulus deſcriptus ex E centro ad interuallum rectę Z æquale, ſecabit, vel tanget portionem circuli AGB, deſcribatur, & ſecet, vel tangat in G, & iungantur AG, GB, GE, trianguli igitur AGB, angulus AGB ad verticem æqualis eſt angulo C: portio enim circuli AGB ſuſcipit angulum æqualem ipſi C, eſt autem & baſis ipſa AB data, & GE ſecãs ipſam baſim bifariam, æqualis eſt Z datæ, quare factum eſt quod oportebat.





At verò ſi datus angulus C fuerit rectus, oportebit datam Z, æqualem eſſe dimidiæ baſi AB, & omne triangulum rectangulum ſupra baſim AB conſtitutum problema efficiet.

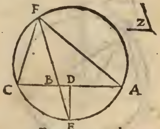
Problema IV.

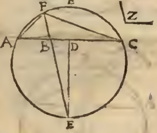
SECET *recta linea angulum ad verticem trianguli bifariam, & cadat in baſim non ad rectos angulos. Da-* *33. lib. 2. de trian. Reg. o mon tani.*

tis portio-

tis portionibus baſis, & angulo, quem ipſa linea cum baſe conſtituit, inuenire triangulum.

Sint datæ portiones baſis A B, B C, angulus autem quem linea ſecans cum ipſa baſe conſtituit, ſit æqualis angulo Z. Oportet inuenire triangulum, ponã tur in directum AB, B C, & ſecetur AC bifariã in D perpendiculariter à recta D E, & fiat angulo Z æqualis angulus CBF, & producta FB occurrat rectæ DE in E, & per puncta AEC, circulus deſcribatur, quem ſecet recta BF in F, & iungantur AF, F C. Quoniam igitur DE ſecat AC bifariã, & ad rectos angulos, erunt circumferentiç AE, EC æquales; quare & anguli AFE, EFC æqualibus circumferentijs inſiſtentes erunt æquales, recta igitur FB ſecat angulũ A F C aduerticẽ trianguli AFC bifariam, eſt autem & angulus CBF æqualis angulo Z ex conſtructione, & portiones baſis A B, B C, ſunt ipſæ datæ. Conſtructum eſt igitur triangulũ AFC, quale conſtruendum proponebatur.

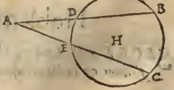




LEMMA V.

SI *duæ rectæ lineæ circulum ſecent, & extra ipſum conueniant, erit prima ad ſecundum, ſicut pars exterior ſecundæ ad partem exteriorem primæ.*

Secent circulum ſub centro H deſcriptũ, duæ lineç rectæ AB, AC, & extra ipſum conueniant in A, & ſint partes exteriores ipſarum A D, AE. Dico eſſe AB ad AC ſicut AE ad AD. Quoniam enim rectangulum BAD æ-



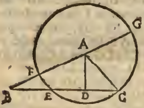
quale

quale eſt rectãgulo CAE, erit AB, ad AC, ſicut AE ad AD, quod erat oſtendendum.

LEMMA VI.

SI baſis trianguli fuerit latere maiori maior, dupla laterum differentia, differentiam ſegmentorum baſis excedet.

Sit triangulum ABC, cuius baſis BC ſit maior latere maiori AB, & centro A. interuallo AC, deſcribatur circulus CEF, ſecans latus AB productum in punctis F, G, baſim verò BC in E, & cadat in BC perpendicularis AD, erit igitur laterum AB, AC differentia BF, differentia verò ſegmentorum BD, DC ipſa BE, æquales * enim ſunt ED, DC, Dico duplam BF maiorem eſſe ipſa BE. Quoniam enim BC maior ponitur quam BA, erit dupla BC maior quam dupla BA, & conſequenter multo maior quam BG. Et quoniam ex antecedente Lemmate eſt vt BC, ad BG, ita BF ad BE, duplatis antecedentibus, erit vt dupla BC, ad BG, ita BF dupla ad BE, ſed dupla BC maior ponitur quam BG, ergo & BF dupla maior erit quam BE, quod erat demonſtrandum. 3. Tertij.



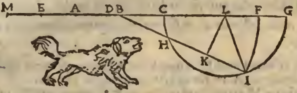
Problema V.

DATA differentia laterum trianguli, & differentia ſegmentorum baſis; datoque exceſſu inter latus maius, & baſim, inuenire triangulum.

Sit data differentia laterum trianguli AB, differentia ſegmentorum baſis Z, & exceſſus inter latus maius, & baſim, AE. Oportet inuenire triangulum. Duplicentur AB, AE, hæc in M, illa in C, & ſit primũ exceſſus penes baſim, ergo ex antecedente quod ſecundo loco præmiſſum eſt Lemmate, erit AC maior quam Z, ab ipſa igitur AC auferatur CD ęqualis Z, & fiat vt AD

ad

ad D C, ita MB ad BG, maior igitur erit BG quam BM, quia & DC maior eſt quam AD : auferuntur æquales B C, BA, reliqua igitur CG maior erit quam reliqua M A,& cum ſecetur CG bifariam in L, erit quoque LG maior quã EA, in ipſa igitur LG



ſumatur LF æqualis E A, & centro L, interuallo L C, vel LG, deſcribatur circulus CIG. Similiter & centro B, interuallo BF, alius circulus deſcribatur ſecans priorem in I. & conectantur BI, LI, ipſam autem BI ſecet circulus CIG in H, perpendicularis verò LK, in K. Quoniam igitur A B, B C, ſunt æquales ex conſtructione, & æquales quoque C L, LG, erit AG ipſius BL dupla, & quoniam BI ſuperat ipſam BL, exceſſu LF, hoc eſt AE, ſuperabit BI dupla duplam BL, hoc eſt ipſam AG, exceſſu AE duplo, hoc eſt exceſſu A M, quare MG ipſius BI dupla erit. Et quoniam eſt vt AD ad DC, ita MB ad BG, erit componendo, vt AC hoc eſt vt BC dupla ad DC, ita MG hoc eſt BI dupla ad BG, & ſubduplatis antecedentibus, erit vt BC, ad DC, ita BI ad BG, ſed vt BI ad BG, ita eſt BC ad BH, ergo vt BC ad DC, ita erit BC ad BH, æqualis igitur erit BH differentia ſegmentorum BK, KI, ipſi DC, hoc eſt Z datæ, eſt autem & BC differentia laterũ B L, LI, æqualis ipſi AB ex conſtructione, & exceſſus LF, quo baſis BI ſuperat latus maius BL, æqualis E A datæ. Conſtructum eſt igitur triangulum BLI, quale conſtruendum proponebatur.

CONSECTARIVM.

Itaque erit vt exceſſus, quo dupla differentia laterum trianguli ſuperat differentiam ſegmentorum baſis, ad compoſitam ex differentia laterum, & duplo exceſſu, quo baſis latus maius excedit, ita differentia ſegmentorum baſis ad aggregatum laterum, & ita differentia laterum ad baſim.

Cum enim ſit AD ad DC, ſicut M B ad BG, erit permutando, vt AD ad M B, ita DC hoc eſt BH ad B G, & conſequenter ita BC ad BI, eſt enim BC ad BI, ſicut BH ad BG.

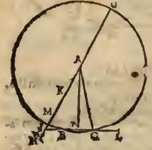
Sit

Sit BC 12, BH 16, LF 4 erit BG hoc eſt compoſita ex lateribus BL, LI 40, baſis verò BI 30, vnde BL 26, LI 14.

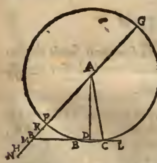
Eſt enim vt 8, ad 20, ita 16, ad 40, & ita 12, ad 30.

Si verò exceſſus fuerit penes latus.

Erit vt exceſſus inter differentiam ſegmētorum baſis, & duplam differentiam laterum trianguli, ad exceſſum inter differentiam laterum, & duplum exceſſum quo latus maius ſuperat baſim, ita differentia ſegmentorum baſis, ad aggregatum laterum, & ita differentia laterum ab baſim.



Sit enim triangulum ABC, in quo perpendicularis AD, ſecet baſim BC in duo ſegmenta BD, DC, & latus AB, quod ſit maius latere AC excedat baſim BC; & centro A interuallo AC deſcribatur circulus ſecans baſim BC in E, latus verò BA productum in punctis F, G, erit igitur laterū AB, AC differentia FB: differentia verò ſegmentorum BD DC, ipſa BE. Duplicetur FB in H, & producatur BC in L, vt ſit CL exceſſus, quo BA ipſam BC ſuperat, cui exceſſui ſumantur HM. MK æquales, & ſumatur quoque FN, æqualis BE. Dico vt NH, ad BK, ita eſſe BE, ad BG, & ita BF, ad BC. Quoniam enim HB, BF ſunt æquales ex conſtructione, & æquales quoque FA, AG, erit HG ipſius AB dupla, & quoniam BA ſuperat baſim BC exceſſu CL: hoc eſt HM, ſuperabit HG duplam BC exceſſu HM duplo, hoc eſt exceſſu HK, ergo KG ipſius BC dupla erit.



Et quoniā eſt * vt BF, ad BE, ita BC, ad BG, duplatis antecedentibus, erit vt HF ad BE, hoc eſt ad FN, ita KG ad BG, & diuidendo, vt NH ad NF, ita BK, ad BG, ac denique permutando, erit vt NH ad BK, ita NF, hoc eſt BE, ad BG, quod eſtò primum. *Ex ant. 1 Lem.*

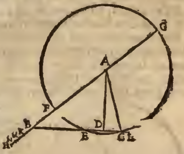
Quoniam igitur eſt vt NH, ad BK, ita BE, ad BG, vt autē BE,

C ad

ad BG, ita BF ad BC, erit vt NH, ad BK, ita BF, ad BC, quod ſecundo loco erat demonſtrandum.

Sit BF 4, BE 10, CL 5, erit BG compoſita ex lateribus B A, AC 30, baſis verò BC 12, vnde AB 17, AC 13.

Eſt enim vt 2, ad 6, ita 10, ad 30, & ita 4, ad 12.



Rurſus ſit BF 5, BE 11, CL 4, erit compoſita ex lateribus BA, AC 33, baſis verò BC 15, vnde AB 19, AC 14.

Eſt enim vt 1, ad 3, ita 11, ad 33, & ita 5, ad 15.

Sit denique BF 6 BE 10, CL 1, erit aggregatum laterum BA, AC 20, baſis verò BC 12, vnde AB 13, AC 7.

Eſt enim vt 2, ad 4, ita 10, ad 20, & ita 6, ad 12.

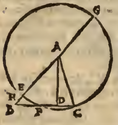
Quod ſi nullus fuerit exceſſus inter duplam differentiam laterum trianguli, & differentiam ſegmentorum baſis (hoc autem accidit; quando ſegmentorum differentia dupla eſt differentiæ laterum) non vnum triangulum problemati ſatisfaciet, ſed infinita: conſtrui enim poſſunt infinita triangula, vt quæ ſunt differentiæ in vno, eædem ſint in omnibus, ſed priuſquam huiuſmodi conſtructionem exhibeamus, ſequens Lemma demonſtrabimus.

LEMMA 7

SI differentia ſegmentorum baſis trianguli fuerit dupla differentiæ laterum, latus maius excedit baſim, exceſſu dimidiæ laterum differentiæ æquali.

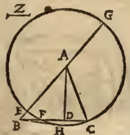
Sit triangulum ABC, in quo perpendicularis AD, ſecet baſim BC in duo ſegmenta BD, DC, & centro A, interuallo AC, quod ſit minus latus, deſcribatur circulus ſecans baſim BC, in F, latus verò AB productum in punctis E, G. erit igitur laterum AB, AC differentia BE, differentia verò ſegmentorum BD, DC, ipſa BF, ſunt * enim FD, DC æquales. ſit autem BF dupla ipſius
3. Tertij. BE. Dico latus AB excedere baſim BC, exceſſu dimidiæ BE, æquali

quali, ſecetur enim BE bifariam in H. Quoniam igitur BF ponitur dupla ipſius BE, & eſt vt BF, ad BE, ita BG, ad BC, erit quoque BG, dupla ipſius BC, & quoniam GE dupla eſt ipſius AE, & BE dupla ipſius EH, tota GB ipſius AH dupla erit: æqualis igitur erit AH, ipſi BC, ergo AB ſuperabit ipſam BC, exceſſu HB, ſed HB eſt dimidia ipſius BE, ergo latus AB excedet, baſim BC exceſſu æquali dimidiæ BE, quod erat demonſtrandum,



Conſtructio prædicti caſus, in quo nullus eſt exceſſus inter duplam differentiam laterum trianguli, & differentiam ſegmentorum baſis.

Sit igitur data differentia laterum BE, differentia ſegmentorum baſis Z. quæ ſit dupla ipſius BE, ergo ex antecedente Lemmate latus maius trianguli excedet baſim, & exceſſus æqualis erit dimidiæ BE, his igitur datis. Oportet inuenire triangulum, Producatur BE, ad quodcunque punctum G, ea tamen cautione, vt BG ſit maior quam quadrupla B E, & circa diametrum EG deſcribatur circulus cuiuſcentrum A, ipſumque circulum tangat ſecta linea BH, in H. Quoniam igitur BG poſita eſt maior quã BE quadrupla, rectangulum E B G, hoc eſt quadratum BH maius erit quadruplo quadrati BE, hoc eſt quadrato Z: eſt enim Z quadratum quadruplum quadrati BE, quia Z, dupla ponitur ipſius BE, ergo & BH maior erit quam Z, ſi igitur centro B interuallo rectæ Z æquali circulus deſcribatur, ſecabit circumferentiam circuli ſub A centro deſcripti, inter puncta E, H, deſcribatur, & ſecet in F, & iuncta BF producatur in C, & iungatur quoque AC, & in BC ducatur perpendicularis AD, erit igitur ſegmentorũ BD, DC, differentia BF, laterum verò AB, AC, differentia BE, eſt autem BF æqualis Z ex conſtructione, & BE ipſa data, & quoniam BF dupla eſt ipſius BE ex antecedente Lẽmate, trianguli ABC latus AB excedet baſim BC, dimidia BE. Conſtructũ eſt igitur triangulum ABC, &c. quod faciendum erat.



CONSECTARIVM.

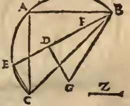
Conſtat igitur infinita triangula conſtrui poſſe, ita vt differentiæ laterum & ſegmentorum exiſtentes in ratione dupla, ſint in omnibus eædem, atque latera maiora excedant baſes, vno eodemque exceſſu, dimidia videlicet laterum differentia rectæ enim BG compoſitæ ex lateribus BA, AC terminus G, non eſt præfinitus: illa enim poteſt eſſe, & maior & minor, requiritur tantum vt quadruplam BE, excedat.

Sit BE 2, BF 4, latus AB excedet baſim BC, & exceſſus erit nempe dimidia BE, compoſita verò ex lateribus BA, AC, poteſt eſſe 9, 10, 11, 12, vel etiam maior, ſolum requiritur, vt ſuperet numerum 8, nempe quadruplam BE. Similiter & baſis BC poteſt eſſe 5, 6, 7, 8, vel cuiuſcunque longitudinis ipſa 4, maioris.

Problema VI.

Vniverſalius [illegible] problemate 12. fol. 92.

DATA *baſe trianguli angulum rectum ſubtendente, & differentia laterum, inuenire triangulum.*



Sit data baſis trianguli angulū rectum ſubtendens AB, differentia laterum Z. Oportet inuenire triangulum. Ducatur ipſi AB perpendicularis, & æqualis AC, & iuncta BC fiat diameter circuli, eius igitur circumferentia tranſibit per A, in ipſo autem circulo CAB accommodetur CE æqualis ipſi Z, & iungatur EB, & in ea ſumatur BF æqualis EC, vel Z, reliqua EF ſecetur bifariam in D perpendiculariter à recta DG, æquali ipſi DE, vel DF, & iungatur BG, erit igitur laterum DB, DG trianguli DBG differentia FB, hoc eſt Z data.

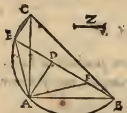
Et quoniam rectus eſt angulus CEB, in ſemicirculo, quadratum CB, æquale erit quadratis EB, EC, hoc eſt EB, FB, ſed quadrata EB, FB, dupla ſunt quadratorum ED, DB, hoc eſt DG, DB, ergo quadratum CB duplum erit quadratorum DG, DB, ſed duplum eſt & quadrati AB, ergo quadratum AB, æquale

10 Secūdi

erit

erit quadratis DB, DG, hoc eſt quadrato GB, quare & recta AB æqualis rectæ GB. Conſtructum eſt igitur triangulum DBG rectangulum in D, cuius laterum DB, DG differentia FB, æqualis eſt Z datæ, & baſis GB angulum rectum ſubtendens æqualis ipſi AB. quod erat faciendum.

ALITER. Ducatur, vt prius ipſi AB perpendicularis, & æqualis AC, & iuncta CB fiat diameter circuli, in quo accommodetur CE æqualis Z, & iungatur EB, cui perpendicularis agatur AD, ipſi autem ED ponatur æqualis DF, & iungantur AE, AF. Quoniam igitur anguli AEB, ACB in eadem portione circuli exiſtentes ſunt interſe æquales, & eſt ſemirectus ACB, erit & AEB ſemirectus: angulus autem EDA rectus eſt ex conſtructione reliquus igitur DAE ſemirectus erit: tres enim interni anguli trianguli EDA duob. rectis ſunt æquales, angulus igitur AED angulo EAD æqualis erit, quare & latus DA lateri DE, vel DF, vnde laterum DA, DB differentia erit FB. Et quoniam latera DE, DA trianguli EDA æqualia ſunt lateribus AD, DF trianguli ADF, vtrunque vtrique, & anguli ad D æquales, nempe recti, erunt ipſa triangula æqualium laterum, & angulorum, latus igitur AF, lateri AE æquale erit, & angulus DAF æqualis angulo DAE, ſed oſtenſus eſt ſemirectus DAE, ergo & DAF ſemirectus erit, atque adeo totus angulus EAF rectus erit, & ideo æqualis recto CAB, ablato communi angulo CAF, reliquus igitur FAB reliquo EAC erit æqualis, ſunt autem & latera AF, AB trianguli AFB æqualia lateribus AE, AC trianguli AEC, vtrunque vtrique, ergo & baſis FB. baſi EC, hoc eſt ipſi Z æqualis erit. Ad datam igitur baſim AB conſtitutum eſt triangulum ADB, cuius laterum DA, DB differentia FB æqualis eſt Z, datæ, quod erat faciendum. 10. ſecun di.



CONSECTARIVM.

Itaque exceſſus, quo duplum quadrati à baſe ſubtendente angulum rectum trianguli, ſuperat quadratum differentiæ laterum, æqualis eſt quadrato aggregati laterum.

Exceſſus enim quo duplum quadrati AB ſuperat quadratum FB,

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

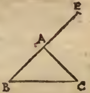
FB, hoc eſt exceſſus, quo quadratum CB ſuperat quadratũ CE, eſt ipſum quadratum EB, compoſitæ videlicet ex lateribus, AD, DB.

Sit AB 10, FB 2, erit compoſita ex AD, DB 14, vnde DA 6, DB 8.

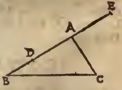
Duplum enim quadrati ex 10, eſt 200, quadratum verò ex 2, eſt 4, exceſſus, igitur erit 196, pro quadrato compoſitæ ex lateribus AD, DB. vnde radix quadrata numeri 196, quæ eſt 14, erit ipſa compoſita.

LEMMA.

RECTA linea, quæ poteſt duplum quadrati ex baſe ſubtendente angulum rectum trianguli, non eſt minor aggregato laterum.



Sit triangulum ABC rectangulum in A, cuius baſis BC. Dico rectam, quæ poteſt duplum quadrati BC, nõ eſſe minorem aggregato laterũ AB, AC, Producatur enim BA in E, vt ſit AE æqualis AC. ſi igitur latera AB, AC ſint æqualia, erit EB dupla ipſius AB, & ideo quadratum EB, quadruplũ erit quadrati AB, ſed quadruplum quadrati AB æquale eſt duplo quadrati BC, ergo quadratum EB duplo quadrati BC æquale erit, & conſequenter recta, quę poteſt duplum quadrati BC ipſi EB aggregato laterum AB, AC, erit æqualis, non autem minor.

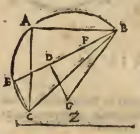


Si verò latera AB, AC non ſint æqualia erit alterum altero maius, ſit maius AB, & ex eo abſcindatur AD æqualis AC, vel AE. Quoniam igitur quadra-
10. Secũdi ta BE, BD * æqualia ſunt duplo quadratorum BA, AE, hoc eſt duplo quadrati BC, duplum quadrati BC, maius erit quadrato BE tantum, & conſequenter recta, quæ poteſt duplum quadrati BC, maior ipſa BE, hoc eſt aggregato laterum AB, AC, non autem minor. Quocunque igitur caſu recta, quæ poteſt duplũ quadrati ex baſe ſubtenden-

te angulum rectum trianguli non eſt minor aggregato laterũ, quod erat oſtendendum.

Problema VII.

DATA baſe trianguli angulum rectum ſubtendente, & aggregato laterum, inuenire triangulum.

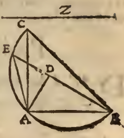


Sit data baſis trianguli angulũ rectum ſubtendens AB, aggregatum laterum Z, oportet inuenire triangulum. Ducatur ipſi AB perpendicularis, & æqualis AC, & iuncta CB fiat diameter circuli, ipſa igitur CB ex antedente Lemmate, non erit minor quam Z, ideoque in circulo, circa diametrum CB deſcripto poterit aptari recta linea ipſi Z æqualis, aptetur & ſit BE, & iungatur EC, cui æqualis ponatur BF, reliqua EF ſecetur bifariam in D perpendiculariter à recta DG, æquali ipſi DF, vel DE, & iungatur BG, erit igitur EB, hoc eſt Z æqualis aggregato laterum DB, DG. Et quoniam rectus eſt angulus CEB in ſemicirculo, quadratum CB æquale erit quadratis FB, EC, hoc eſt EB FB, ſed quadrata EB, FB * dupla ſunt quadratorum ED, DB hoc eſt DG. DB, ergo quadratum CB du- 10. Secundi.
plum erit quadratorum D G, D B, ſed duplum eſt & quadrati AB, ergo quadratum A B, æquale erit quadratis DB. DG, hoc eſt quadrato G B; quare & recta AB æqualis rectæ GB. Conſtructum eſt igitur triangulum DBG rectangulum in D, cuius aggregatum laterum DB, DG æquale eſt Z datæ, & baſis GB angulum rectum ſubtendens æqualis ipſi AB, quod erat faciendum.

ALITER Ducatur vt prius ipſi AB perpendicularis, & æqualis AC, & iuncta CB fiat diameter circuli, in quo accommodetur BE æqualis Z, diameter enim CB oſtenſa eſt non minor quam Z, ipſi autem EB ducatur perpendicularis A D, & iungatur AE. Quoniam igitur æquales ſunt anguli ACB. AEB, ſunt enim in eadem portione circuli, erit angulus AEB ſemirectus; quia ſemirectus eſt & ACB, ſed rectus eſt angulus EDA, reliquus igitur DAE trianguli DAE, erit quoque ſemirectus,

omnis

omnis enim trianguli, tres interni anguli duobus rectis ſunt æquales, angulus igitur D A E angulo D E A æqualis erit, vnde & latus D E lateri D A erit ęquale, addita communi DB, compoſita igitur ex lateribus A D, D B æqualis erit ipſi EB, hoc eſt Z datæ. Ad datam igitur baſim AB conſtitutum eſt triangulũ DAB rectangulum in D, cuius aggregatum laterum DA, DB æquale eſt Z datæ, quod faciendum erat.



CONSECTARIVM.

Itaque exceſſus, quo duplum quadrati ex baſe ſubtendente angulum rectum trianguli ſuperat quadratum aggregati laterum, æqualis eſt quadrato differentiæ laterum.

Reſumpta enim primæ conſtructionis figura, exceſſus, quo duplum quadrati AB, hoc eſt quo quadratum CB ſuperat quadratum EB, eſt ipſum quadratum EC, hoc eſt FB differentiæ videlicet laterum DG DB.

Sit baſis GB 10, compoſita ex lateribus DG, DB 14, erit FB differentia laterum DG, DB 2, vnde DG 6, DB 8.

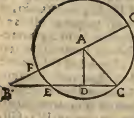
Duplum enim quadratum ex 10, eſt 200, quadratum verò ex 14, eſt 196, exceſſus igitur erit 4, pro quadrato differentiæ laterum DG, DB, vnde radix quadrata numeri 4, quæ eſt 2, erit ipſa differentia.

LEMMA. 9

DIFFERENTIA ſegmentorum baſis trianguli ad differentiam laterum eãdem habet rationem quam aggregatum laterum ad baſim.

Sit triangulum ABC, in quo perpendicularis AD ſecet baſim BC in duo ſegmenta BD, DC, & centro A, interuallo AC, quod ſit latus minus, deſcribatur circulus CEF ſecans baſim BC in E,

latus

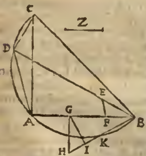


latus verò AB productum in punctis F, G, erit igitur laterum AB, AC differentia BF, aggregatum verò BG, atque differentia ſegmẽtorum BD, DC, erit BE: ſunt enim æquales * ED, DC, Dico eſſe BE, ad BF ſicut BG, ad BC: rectangulum enim EBC æquale eſt rectangulo FBG, quare conſtat propoſitum. 3 Tertij.

Problema VIII.

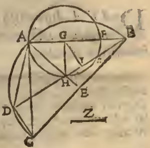
DATA differentia ſegmentorum baſis ſubtendentis angulum rectum trianguli, & aggregato laterum, inuenire triangulum.

Sit data differentia ſegmentorum baſis ſubtendentis angulum rectum trianguli Z, aggregatum autem laterum AB, Oportet inuenire triangulum. Ducatur ipſi AB perpendicularis, & æqualis AC, & iungatur CB, in eaque deſcribatur ſemicirculus, eius igitur circumferentia tranſibit per A, in ipſo autem ſemicirculo accõmodetur CD æqualis Z, & iungantur DB, DA, ipſi autem CD æqualis ponatur BE, & per E, ipſi DA parallela agatur EF, ſecans AB, in F, reliqua AF ſecetur bifariam, & ad rectos angulos in G, à recta GH æquali ipſi GA, vel GF, & iungatur HB. Quoniam igitur parallelæ ſunt DA, EF ex conſtructione, erit vt DB, ad EB, ita AB ad FB, & vt quadratum DB ad quadratum EB, hoc eſt CD,



ita quadratum AB ad FB quadratum, & componendo, erit vt ſumma quadratorum DB, DC, hoc eſt vt quadratum CB ſeu, quod idem eſt, vt duplum quadrati AB, ad quadratum EB, ita ſumma quadratorum AB, FB, hoc eſt * duplum quadratorum AG, GB, vel GH, GB, ad quadratum FB, & ſubduplatis antecedentibus, 10 Secundi.

dentibus, erit vt quadratum AB ad quadratum EB, ita ſumma quadratorum GH, GB, hoc eſt quadratum HB, ad FB quadratum, vnde vt AB ad EB, ita erit HB ad FB, & permutando, vt AB ad HB, ita EB ad FB. Iam agatur GI perpendicularis ad HB, & ipſi HI æqualis ponatur IK, differentia igitur ſegmentorum HI, IB, erit KB, & ideo ex antecedente Lemmate, erit vt AB ad HB, ita KB ad FB, ſed oſtenſum eſt vt AB ad HB, ita eſſe EB ad FB, ergo vt KB ad FB, ita erit EB ad FB, æqualis igitur erit KB ipſi EB, hoc eſt Z datæ, eſt autem & compoſita ex lateribus HG, GB, æqualis ipſi AB; Conſtructum eſt igitur triangulum HGB rectangulum in G. cuius aggregatum laterum HG, GB, æquale eſt AB datæ, & KB differentia ſegmentorum HI, IB, æqualis ipſi Z, quod erat faciendum.



ALITER. Ducatur vt ſupra ipſi AB perpendicularis, & æqualis AC, & iuncta CB, fiat diameter circuli BAC, cuius centrum E, in ipſo autem circulo accommodetur CD æqualis Z, & iungantur DB, AE, ſe mutuo ſecantes in H, & ex H ducatur ipſi AB perpendicularis HG. Quoniam igitur rectus eſt angulus AGH, & ſemirectus GAH, erit *quoque & reliquus GHA ſemirectus, & ideo ipſi GAH æqualis, vnde latus HG æquale erit lateri GA, addita communi GB, compoſita igitur ex lateribus HG, GB. erit æqualis ipſi AB.

32. Primi

Iam agatur GI perpendicularis ad HB, & centro G, interuallo GA, vel GH, deſcribatur circulus AHF, ſecans DB in K, ipſam verò AB in F, & iungatur AK, differentia igitur ſegmentorum HI, IB, erit KB, ſunt* enim æquales HI, IK. & quoniam angulus AGH ad centrum rectus eſt ex conſtructione, erit angulus AKH ad circumferentiam ſemirectus, ſed ſemirectus eſt & angulus ADB, eſt enim çqualis ſemirecto ACB, cum vterque, eidem circumferentiæ AB inſiſtat, ergo reliquus angulus DAK, trianguli DAK rectus erit, & ideo æqualis recto BAC, dempto communi angulo CAK, reliquus DAC reliquo KAB æqualis erit, ſed & latus AB æquale eſt lateri AC ex conſtructione, & latus AK æquale lateri AD ratione æqualium angulorum AKD, ADK, ergo & baſis kB trianguli AKB, æqualis erit baſi DC trianguli ADC; Conſtructum eſt igitur triangulum

3. Tertij.

lum GHB rectangulum in G. cuius aggregatum laterum HG, GB, æquale eſt ipſi AB, & KB differentia ſegmentorum HI, IB, æqualis ipſi DC, hoc eſt Z datæ, quod erat faciendum.

* In hac figura ducenda eſt linea Ak.

CONSECTARIVM.

Itaque erit vt recta, quæ poteſt duplum quadrati aggregati laterum trianguli, minus quadrato differentiæ ſegmentorum baſis ad aggregatum laterum, ita differentia ſegmentorum ad differentiam laterum, & ita aggregatum laterum ad baſim.

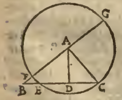
Reſumpta enim primæ cõſtructionis figura, eſt vt DB ad AB, ita EB, hoc eſt KB ad FB, & ita AB ad HB, eſt enim AB ad HB, ſicut KB ad FB;

In figura ſecundæ cõſtructionis, ſimilia ſunt triangula ABD, HBA, ſunt enim anguli ADB, HAB æquales, oſtenſus eſt vterque ſemiſectus, & angulus ad B communis vtrique, vt igitur DB ad AB, ita erit AB ad HB, & ita KB ad FB, eſt enim kB ad FB, ſicut AB ad HB,

Sit kB 7. compoſita ex lateribus HG, GB 35, erit FB 5, HB 25, vnde GB 20, GH 15. Eſt enim vt L 2401, hoc eſt vt 49, ad 35, ita 7, ad 5, & ita 35, ad 25.

LEMMA 6.

DIFFERENTIA ſegmentorum baſis ſubtendentis angulum rectum trianguli, minor eſt quam recta, quæ poteſt duplum quadrati differentiæ laterum.



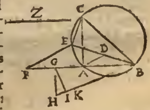
Sit triangulum ABC rectangulum in A, in quo perpendicularis AD, ſecet baſim BC, in duo ſegmenta inæqualia, BD, DC, & centro A, interuallo AC, quod ſit minus latus, deſcribatur circulus CEF, ſecans baſim BC in E, latus verò AB productum in punctis F, G, erit igitur laterum AB, AC differentia BF, differentia verò ſegmentorum BD, DC ipſa BE, ſunt enim ED, DC, * æquales; Dico ipſam BE minorem eſſe quam recta quæ poteſt duplum qua- 3. Tertij

 drati

drati BF. Quoniam enim eſt BC ad BG, ſicut BF ad BE, erit vt quadratum BC ad quadratum BG, ita BF quadratum ad quadratum BE, & duplatis antecedentibus, erit vt duplum quadrati BC ad quadratum BG, ita duplum quadrati BF ad quadratum
In ſecunda parte Lem. ante Prob. 7. BE, ſed oſtenſum * eſt quadratum BG minus eſſe duplo quadrati BC, ergo & quadratum BE duplo quadrati BF minus erit, quare & recta BE minor erit quam recta, quæ poteſt duplum quadrati BF, quod erat demonſtrandum.

Problema IX.

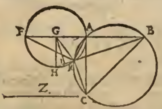
DATA *differentia ſegmentorum baſis ſubtendentis angulum rectum trianguli, & differentia laterum; inuenire triangulum.*



Sit data differentia ſegmentorū baſis angulum rectum ſubtendentis Z, & differentia laterum AB. Oportet inuenire triangulum. Ponatur ipſi AB, æqualis & ad angulos rectos AC, & iuncta CB fiat diameter circuli, ex antecedente igitur Lemmate, CB maior eſt quam Z: ideoque in circulo circa diametrū CB deſcripto, poterit aptari recta linea ipſi Z æqualis, aptetur, & ſit BE, & iungatur E C, cui æqualis ſumatur B D, & iungatur quoque DA, & ei parallela agatur EF, ſecans BA continuatam in F, & ſecetur FA bifariam in G, à perpendiculari GH æquali ipſi GA, vel GF, & iungatur HB: triangulum igitur GHB rectāgulum eſt in G, & differentia laterum GH, GB eſt ipſa AB data. Iam agatur ipſi HB perpendicularis GI, & ſumatur IK æqualis IH, Quoniam igitur parallelæ ſunt EF, DA ex conſtructione, erit vt DB, hoc eſt EC, ad EB, ita AB, ad FB, & vt quadratum EC ad quadratum EB, ita quadratum AB, ad FB quadra-
41. Primi tum, & componendo vt ſumma quadratorum EC, EB, hoc * eſt vt quadratum CB, ſeu quod idem eſt duplum quadrati AB, ad quadratum EB, ita erit ſumma quadratorum AB, FB, hoc *
10. Secundi. eſt duplum quadratorum FG, GB, vel GH, GB ad quadratum FB, & ſubduplatis antecedentibus, erit vt quadratum AB, ad quadratum EB, ita ſumma quadratorum GH, GB, hoc eſt quadratum

dratum

dratum HB, ad FB quadratum: quare vt AB, ad EB, hoc eſt ad Z, ita erit HB, ad FB, ſed vt HB, ad FB, ita eſt AB, ad KB, ergo vt AB ad Z, ita erit AB, ad KB, æquales igitur erunt KB, & Z. Conſtructum eſt igitur triangulum GHB rectangulum ad G, cuius laterum GH, GB differentia eſt ipſa AB data, & KB differentia ſegmentorum HI, IB æqualis datæ Z, quod facere oportebat.



ALITER Inclinentur, vt prius ad angulos rectos AB, AC æquales, & iuncta BC fiat diameter circuli, in quo accõmodetur ipſi Z ęqualis BK: eſt autem ex antecedente Lemmate diameter BC maior quã Z, & conectatur AK, cui perpẽdicularis ducatur kF. Quoniam igitur angulus FAk minor eſt recto FAC, & angulus AkF rectus, erunt ambo ſimul duobus rectis minores, quare coibunt rectæ BA, kF: coeant in F, & circa diametrum FA deſcribatur circulus cuius centrum G, is igitur circulus tranſibit per k, quoniam rectus eſt angulus AkF. Deinde producatur Bk donec ſecet circulum AkF, in H: inferius autem demonſtrabimus rectam Bk ſecare circulum, non autem contingere, & iuncta GH, ducatur ipſi HB perpendicularis GI. Quoniam igitur HI, Ik ſunt æquales, differentia ſegmentorum HI, IB, erit kB, cui æqualis eſt Z data. Similiter differentia laterum GH, GB eſt ipſa AB data, ſupereſt igitur vt angulus HGB ſit rectus, id autem ita fit manifeſtum.

Quoniam enim ſemirectus eſt angulus AkB (eſt enim æqualis ſemirecto ACB, vterque eidem circumferentiæ AB inſiſtit) eſt autem AkF, rectus ex conſtructione, reliquus FkH ſemirectus erit: tres enim anguli AkB, AkF, FkH duobus rectis ſunt æquales, & quoniam angulus FGH ad centrum duplus eſt anguli FkH ad circumferentiam, & eſt ſemirectus FkH, erit angulus FGH rectus, quare & HGB rectus quoque erit; Conſtructum eſt igitur triangulum GHB rectangulum in G, cuius laterum GH, GB differentia eſt ipſa AB data, & kB differentia ſegmentorum HI, IB æqualis ipſi Z, quod erat faciendum.

At verò rectam Bk ſecare circulum, ita demonſtrabitur. Si enim non ſecat, tangit: tangat ſi poſſibile eſt, contactus igitur erit in k, & angulus GkB, erit rectus, ſed ſemirectus eſt AkB,

quia

quia æqualis eſt ſemirecto A C B, ergo & reliquus AkG ſemirectus erit, ſed angulo AkG æqualis eſt angulus GAk, ratione æqualium laterum GA, Gk, ergo & ipſe GAk ſemirectus erit, ablato igitur ſemirecto angulo G A k à recto G A C, reliquus kAC erit ſemirectus, ſed ipſi kAC æqualis eſt kBC, ſunt enim in eadem portione circuli, ergo & ipſe kBC ſemirectus erit, quare ſemirecto ABC æqualis, quod eſt abſurdum; non igitur Bk tangit circulum, ſed ſecat, quod erat demonſtrandum.

CONSECTARIVM.

Itaque erit vt recta, quæ poteſt duplum quadrati differentiæ laterum trianguli minus quadrato differentiæ ſegmentorum baſis, ad differentiam laterum, ita differentia ſegmentorum ad aggregatum laterum, & ita differentia laterum ad baſim.

Reſumpta enim primæ conſtructionis figura, eſt vt D B, ad BA, ita EB ad BF, hoc eſt vt EC, ad BA, ita Bk, ad BF. & ita AB, ad BH, eſt * enim eadem ratio AB ad BH, quæ kB ad BF.

In ſecunda conſtructionis figura, iuncta k C, ſimilia erunt triangula A k C, F k B, nam angulus A C k æqualis eſt angulo A B k, quia in eadem ſunt portione circuli, & quoniam recti ſunt anguli CkB, AkF, hic ex conſtructione, ille ex vi ſemicirculi, & ideo æquales, addito communi angulo AkB, totus angulus AkC toti FkB æqualis erit, ac reliquus reliquo, vt igitur kC, ad CA, vel ad AB, ita erit kB ad FB, & ita AB, ad BH, eſt * enim AB ad BH, ſicut kB ad BF

Ex Lem. in prob. 8

Sit AB 91, kB 119, erit FB 221, HB 169, vnde GB 156, GH 65.

Eſt enim vt L 2401, hoc eſt vt 49, ad 91, ita 119, ad 221, & ita 91, ad 169.

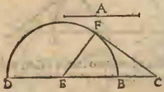
Problema X.

Procemium ... problemate 16. fol. 41.

DATO *vno ex lateribus trianguli angulum rectum ambientibus, & differentia inter reliquum latus, & baſim, inuenire triangulum.*

Sit

Sit datum vnum ex lateribus trianguli angulum rectum ambientibus A, data quoque differentia inter reliquum latus, & baſim BC. Oportet inuenire triangulum. Fiat quadrato A æquale rectangulum BCD, & circa diametrum DB deſcribatur circulus cuius centrum E, ipſum autem circulum contingat recta CF in F, & iungatur EF, erit igitur rectangulum BCD æquale quadrato FC, ſed æquale eſt & quadrato A ex conſtructione, quadratum igitur FC quadrato A æquale



erit, quare & recta FC æqualis rectæ A. Eſt autem * & angulus EFC rectus, & baſis EC differt à latere EF per BC, æquales enim ſunt EF, EB ex definitione circuli. Conſtructum eſt igitur triangulum EFC, quale conſtruendum proponebatur. 18. Te

CONSECTARIVM.

Itaque, alterum ex duobus lateribus trianguli angulum rectum ambientibus medium eſt proportionale inter differentiam & aggregatum reliqui lateris, & baſis.

Quoniam enim rectangulum BCD æquale eſt quadrato FC, erit vt BC ad FC, ita FC ad DC.

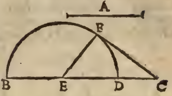
Sit FC 12, BC 6, erit DC 24, vnde EC 15, EF 9, Eſt enim vt 6, ad 12, ita 12, ad 24.

Problema XI.

DATO vno ex lateribus trianguli angulum rectum ambientibus, & aggregato reliqui lateris, & baſis, inuenire triangulum.

Sit datum vnum ex lateribus trianguli angulum rectum ambientibus A, datum quoque aggregatum reliqui lateris, & baſis BC, oportet inuenire triangulum. Secetur BC in D, vt rectangulum BCD ſit æquale quadrato A, & circa diametrum BD circulus deſcribatur cuius centrum E, à puncto autem C ducatur CF circulum contingens in F, & iungatur EF. Quoniam igitur CF contingit circulum in F, rectangulum BCD, æquale

æquale erit quadrato FC, ſed æquale eſt & quadrato A, ex conſtructione, ergo quadratum FC quadrato A, æquale erit, vnde & recta FC æqualis erit rectæ A. Conſtructum eſt igitur triangulum EFC rectangulum in F, cuius latus



FC æquale eſt ipſi A, & compoſita ex reliquo latere FE, & baſe EC æqualis BC datæ, quod erat faciendum.

CONSECTARIVM.

Itaque alterum ex duobus lateribus trianguli angulum rectum ambientibus medium eſt proportionale inter differentiam, & aggregatum reliqui lateris, & baſis.

Quoniam enim rectangulum BCD æquale eſt quadrato FC, erit vt BC, ad FC, ita FC, ad DC.

Sit FC 12, BC 24, erit DC 6, vnde EC 15, EF 9. Eſt enim vt 24, ad 12, ita 12, ad 6.

Sex Problemata proximè præcedentia propoſita ſunt de triangulo rectangulo tantum, ſex verò quæ ſequuntur proponuntur de omni triangulo.

Problema XII.

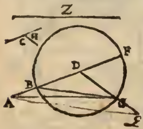
DATA baſe trianguli, differentia laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.

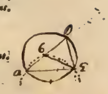
Sit data baſis trianguli Z, differentia laterum AB, angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.

Ponatur iam factum & ſit illud triangulum DAG, cuius baſis AG eſtò æqualis ipſi Z, & angulus ADG aduerticem æqualis angulo C, ac denique differentia laterum DA, DG, quæ ſit AB eſtò poſitione, ac magnitudine data. Quoniam igitur DA, DG differunt per AB, erunt DB, DG æquales, itaque centro D interuallo DB, vel DG deſcribatur circulus, quem ſecet AD cõtinuata in F, & iungatur BG. Quoniam igitur datus eſt angulus ADG, dabitur & angulus FDG, vt reliquus è duobus rectis, ergo dabitur quoque & angulus FBG, vt dimidius anguli FDG,

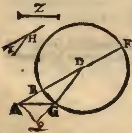
eſt

eſt enim angulus FDG ad centrum duplus anguli FBG, ad cir-
cumferentiam, ſed poſitione eſt BD, & poſitione quoque pun-
ctum B, erit * igitur poſitione & BG, & quoniam in ipſam BG 29. Datorum.
à dato puncto A ducta eſt AG magnitudine data, dabitur * ipſa
AG poſitione quoque, quare * & 31. Dat.
punctum G, ſed datur, & angulus 25. Dat.
DGB: ē enim ęqualis angulo DBG,
æqualibus exiſtentibus DB, DG: er-
go dabitur * GD poſitione, quare * 29. Dat.
& punctū quoque D dabitur. Quo- 25. Dat.
niam igitur datæ ſunt poſitione ex
tremitates A, D, G, datarum poſi-
tione AD, DG, ipſæ quoque * ma- 26. Dat.
gnitudine datæ erunt.





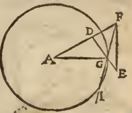
Componetur autem ſic. Produ-
catur AB in F, & fiat angulus FBG
æqualis dimidio eius, quem relin-
quit è duobus rectis angulus C: hoc
eſt dimidio anguli H, & in BG po-
nāt AG æqualis Z, & angulo GBD
ęqualis conſtituatur angulus BGD,
erunt igitur æquales DB, DG, qua-
re differentia laterū DA DG trian-
guli DAG, erit ipſa AB data. De-
ſcribatur ex D centro ad interuallum DG, vel DB, circulus, quē
ſecet AF in F, erit igitur angulus FDG ad centrum, duplus an-
guli FBG ad circumferentiam, ſed eiuſdem anguli FBG duplus
eſt quoque & angulus H ex conſtructione, ergo angulus FDG
angulo H æqualis erit, vnde & angulus ADG ad verticē trian-
guli æqualis angulo C: eſt autem & baſis AG æqualis datæ Z
ex conſtructione. Conſtructum eſt igitur triangulum DAG,
quod facere oportebat.



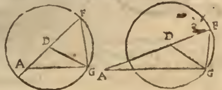
LEMMA II

*SI angulus trianguli fuerit centrum circuli, baſis verò ſe-
midiameter, & ducatur linea recta non ex centro cir-
culi, ſed ab altera extremitate aggregati laterum, conſtituēs
cum eo angulum æqualē dimidio, qui eſt ad verticem trian-
guli, angulo, illa recta linea in circulum incidet.*

Sit triangulum DAG cuius baſis AG, & centro A, interuallo AG, deſcribatur circulus, & producatur AD in F, vt ſit DF æqualis DG, aggregatum igitur laterum AD, DG erit AF: à puncto autem F ducatur FI, faciens angulum AFI, æqualem dimidio anguli ADG; Dico ipſam FI in circulum incidere, ſi enim non incidit, cadit extra qualis eſt FE, itaque continuetur DG, donec ſecet ipſam FE in E. Quoniam igitur externus angulus ADE trianguli DFE, æqualis eſt duobus internis DFE, DEF, quorum vnus nempe DFE, ponitur dimidius ipſius ADE, erit & reliquus DEF ipſius ADE dimidius: æquales igitur erunt anguli DFE, DEF, & ideo æquales rectæ DF, DE, quod eſt abſurdũ, ponitur enim DF æqualis DG, Recta igitur FI in circulum incidet, quod erat demonſtrandum.



ALITER. Sit triangulum, DAG cuius baſis AG, & centro D, interuallo DG, deſcribatur circulus, ſecans AD productam in F, & iungatur FG, erit angulus AFG æqualis dimidio anguli AD:G hic enim eſt ad centrũ, ille ad circumferentiam. Si igitur ex A centro ad interuallũ AG circulus deſcribatur, ipſũ tanget, vel ſecabit recta linea FG, ideoque in ipſum circulum incidet, quod erat demonſtrandum.



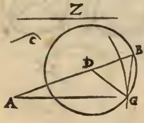
Problema XIII.

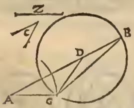
Prob. 15. lib. 2. Regiomontani de triãgulis.

DATA *baſe trianguli, aggregato laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.*

Sit data baſis trianguli Z, aggregatum laterum AB, angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum. Factum iam ſit, & ſit illud triangulum DAG, cuius baſis AG eſtò æqualis ipſi Z, aggregatum verò laterum AD, DG, æquale ipſi

ipſi AB, magnitudine ac poſitione datæ, & angulus ADG ad verticem æqualis angulo C. iungatur autem BG Quoniam igitur compoſita ex AD, DG æqualis eſt ipſi AB, ablata communi AD, reliqua DG reliquæ DB æqualis erit, & ideo circulus ex D centro deſcriptus ad interuallum DG, tranſibit per B: deſcribatur, erit igitur angulus A D G ad centrum, duplus anguli B ad circumferentiam, ſed datur angulus A D G, ergo dabitur & angulus B. & eſt poſitione A B, ergo * & BG poſitione erit, ſed in ipſam BG à dato puncto A ducta eſt AG magnitudine data, ergo dabitur * ipſa AG poſitione quoque, & datum * erit pūctum G, & data * quoque poſitione G D, datur enim angulus D G B, quia æqualis eſt dato DBG æqualibus exiſtentibus DB, DG, quare & punctum D dabitur. Quoniam igitur datæ ſunt extremitates A. D G, datarum poſitione, AD, DG ipſæ quoque magnitudine datæ erunt. 29. Dat. 31. Dat. 25. Dat. 29. Dat.



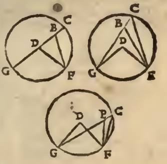


Componetur autem Problema, hoc modo. Centro A, interuallo datæ Z æquali, deſcribatur circulus, & fiat angulus ABG æqualis dimidio anguli C. ex antecedente igitur Lemmate, recta BG incidet in circulum ſub A centro deſcriptum, incidat in G, & iungatur AG, & fiat angulo B æqualis angulus BGD. erit igitur DG æqualis D B, addita communi AD, compoſita ex AD, DG, erit æqualis AB. Centro autem D, interuallo DB, vel DG deſcribatur circulus BG, erit igitur angulus A D G ad centrum duplus anguli B ad circumferentiam, ſed & angulus C duplus eſt anguli B ex conſtructione, ergo angulus ADE angulo C æqualis erit, eſt autem & baſis AG æqualis datæ Z ex conſtructione. Conſtructum eſt igitur triangulum DAG quale conſtruendum proponebatur.

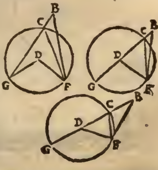
LEMMA. VI.

Si duo anguli in ratione dupla eidem circumferentiæ cir-

culi inſiſterint, duplus autem, fuerit ad centrum, alter ad circumferentiam erit.



Inſiſtant duo anguli GDF, GBF eidem circuli circumferentiæ GF, & ſit angulus GDF ad centrum circuli, atque duplus anguli GBF, Dico angulum GBF ad circumferētiam eſſe. Si enim non eſt ad circūferentiam, erit intra circulū, vel extra. Sit primum ſi fieri poteſt, intra circulum, & producatur GB vſque ad circumferentiam in C, & iungatur FC, erit igitur angulus GDF ad centrum, duplus anguli GCF ad circumferentiam, ſed duplus eſt & anguli GBF ex hypotheſi, ergo angulus GBF angulo GCF æqualis erit, externus interno, quod eſt abſurdum: angulus igitur GBF non eſt intra circulum.



Deinde ſit angulus G B F extra circulum, ipſum igitur circulum ſecabit, vel vtraque rectarū GB. FB, vel ſaltem vna: ſecet ipſa GB in puncto C, & iungatur FC, erit igitur angulus GDF. ad centrum, duplus anguli GCF ad circumferentiam; ſed duplus eſt & anguli B ex hypotheſi, ergo angulus GCF angulo B æqualis erit, externus interno, quod eſt abſurdum: angulus igitur GBF non eſt extra circulum, ſed neque intra circulum vt eſt oſtenſum, ergo ad circumferentiam erit, quod erat demonſtrandum.

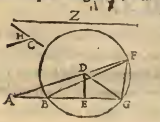
Problema XIV.

DATA differentia ſegmentorum baſis trianguli, aggregato laterū, & angulo verticis, inuenire triangulū.

Sit

Sit data differentia ſegmentorum baſis trianguli AB, aggregatum laterum Z, angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.

Inuentum iam ſit, & ſit illud triangulum DAG in quo perpendicularis DE, & centro D, interuallo DG, quod ſit minus latus, deſcribatur circulus, ſecans latus AD productum in F, baſim verò AG in B, erunt * igitur BE, EG æquales, vnde diffe- 3. Tertij.
rentia ſegmentorum AE, EG erit AB: eſtò igitur ipſa AB poſitione ac magnitudine data, compoſita verò ex lateribus AD, DG: hoc eſt ipſa AF, eſtò æqualis Z. & angulus ADG ad verticem æqualis angulo C, & iungantur BF, FG. Quoniam igitur



datur angulus ADG, dabitur & angulus FDG, vt reliquus è duobus rectis, & dabitur quoque angulus FBG, vt dimidius anguli FDG: angulus enim FDG ad centrum, duplus eſt anguli FBG ad circumferentiam, poſitione
igitur * erit BF, quia poſitione 29. Dat.
eſt & AB, & quoniam datum eſt punctum A, à quo in BF ducta
eſt AF magnitudine data, dabitur * ipſa AF poſitione quoque, 31. Dat.
vnde dabitur * & punctum F, & quoniam datus eſt angulus 25. Dat.
ADG ad centrum, datus erit & angulus AFG ad circumferen-
tiam, vt eius dimidius, atque data * erit poſitione FG, vnde 29. Dat.
datum * erit & punctum G. & data * quoque poſitione GD,
quia datus eſt angulus DGF: etenim æqualis eſt dato angulo 25. Dat.
DFG, ratione æqualium laterum DG, DF, quare datum * erit 29. Dat. 25. Dat.
& punctum D. Quoniam igitur datæ ſunt extremitates A D, G, datarum poſitione, AD, DG, AG ipſæ quoque magnitudine datæ erunt.

Componetur autem hoc modo. Producatur AB in G, & fiat angulus GBF æqualis dimidio eius, quem relinquit è duob. rectis angulus C, hoc eſt dimidio anguli H, & in BF ponatur AF æqualis Z, & fiat angulus AFG æqualis dimidio anguli C, angulus verò FGD æqualis angulo AFG, erunt igitur æquales DG, DF: addita communi AD compoſita ex lateribus AD, DG trianguli DAG, æqualis erit ipſi AF, hoc eſt Z datæ.

Deinde centro D, interuallo DG vel DF, deſcribatur circulus FE. Quoniam igitur angulus C duplus eſt anguli AFG ex conſtructione, ſimiliter & angulus ADG ad centrum duplus

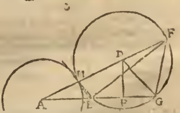
eiuſdem

eiuſdem anguli AFG ad circumferentiam, erit angulus ADG aduerticem dato angulo C æqualis, quare & angulus FDG angulo H, ſed angulus H duplus eſt anguli FBG ex conſtructione, ergo & angulus FDG eiuſdem anguli FBG duplus erit, ſed angulus FDG eſt ad centrum, & inſiſtit circumferentiæ FG, cui etiam & angulus FBG inſiſtit, ergo ex antecedente Lemmate, angulus FBG ad circumferentiam erit. Iam agatur ipſi
3. Tertij. AG perpendicularis DE, erunt igitur * æquales BE, EG, & ideo differentia ſegmentorum AE, FG erit ipſa AB data. Conſtructum eſt igitur triangulum DAG, vt facere oportebat.

LEMMA XIII

SI angulus trianguli fuerit centrum circuli, differentia verò laterum ſemidiameter, & ducatur linea recta non ex centro circuli, ſed ab altera extremitate differentiæ ſegmentorum baſis, conſtituens cum ea angulum æqualem dimidio; qui eſt ad verticem trianguli, angulo, illa recta linea circulum ſecabit.

Sit triangulum DAG, in quo perpendicularis DE ſecet baſim AG in E, & centro D, interuallo DG, quod ſit minus latus, deſcribatur circulus ſecans latus AD productum in punctis H, F, baſim verò AG in B; laterum igitur DA, DG differentia erit AH, differentia verò ſegmentorum AE, EG erit AB, iungantur autem BH, FG. Quoniam igitur quadrilaterum FGBH eſt in circulo, anguli HBG, HFG ex aduerſo, duobus rectis ſunt æquales, ſed & anguli HBG, HBA æquales ſunt duobus rectis, ergo anguli HBG, HFG angulis HBG, HBA æquales erunt, dempto



communi angulo HBG, reliquus HFG, reliquo HBA æqualis erit, ſed angulus HFG ad circumferentiam dimidius eſt anguli HDG ad centrum, ergo & angulus HBA, eiuſdem anguli ADG dimidius erit, Dico igitur circulum ſub A centro, interuallo

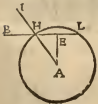
uallo A H deſcriptum, ſecari à BH: manifeſtum eſt autem ipſam BH in eum incidere, quoniam punctum H eſt in circumferentia, ſi igitur eum non ſecat, tangit, tangat ſi fieri poteſt, contactus erit in H, & iungatur BF, ergo rectus * erit angulus AHB, & ideo æqualis recto HBF, qui eſt in ſemicirculo; quare parallelæ * erunt AF, BF, quod eſt abſurdum, conueniunt enim in F. Non igitur BH tangit circulum, cuius centrum A, ſed ſecat, quod erat demonſtrandum.

18. Tertij

27. Primi

LEMMA XIIII

SECET *circulum ſub A centro recta linea B H L, in punctis H, L, & per punctum H, quod ſit propius ad B, ducatur altera recta A H I. Dico angulum I H B minorem eſſe recto.*



Diuidatur enim HL bifariam in E, & iũgatur AE, rectus igitur erit angulus AEH, ac proinde angulus EHA recto minor: tres enim interni anguli trianguli A E H duobus rectis ſunt æquales, ſed angulus E H A, æqualis eſt angulo IHB: ſunt enim ad verticem, ergo & angulus IHB, erit recto minor, quod erat demonſtrandum.

Problema X V.

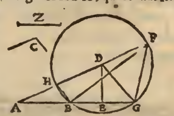
DATA *differentia ſegmentorum baſis trianguli, differentia laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.*

Prob. 20. lib. 2. Regiom. de triãgulis.

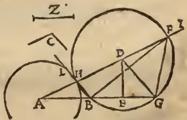
Sit data differentia ſegmentorum baſis trianguli AB, differentia laterum Z, angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.

Factum iam ſit, & ſit illud triangulum DAG, in quo perpendicularis DE, & centro D, interuallo DG quod ſit minus latus, deſcribatur circulus ſecans latus DA in H, baſim verò AG in B, differentia igitur ſegmentorum AE, E G erit A B, differentia verò

verò laterum DA, DG erit AH. Eſtò igitur AB poſitione atque magnitudine data, ipſa verò AH eſtò æqualis datæ Z, & angulus A D G ad verticem æqualis angulo C, & producatur AD vſque ad circumferentiam in F. & iungantur HB, BF, FG. Quoniam igitur quadrilaterum F G B H eſt in circulo, anguli HBG. HFG ex aduerſo, duobus rectis erunt æquales: ſed & anguli HBG HBA duobus rectis ſunt æquales, ergo anguli HBG, H F G angulis H B G, H B A æquales erunt: auferatur vtrinque angulus HBG. reliquus igitur HFG reliquo HBA æqualis erit, ſed angulus ADG ad centrum, duplus eſt anguli AFG ad circũferentiam, ergo & anguli HBA duplus erit angulus ADG, ſed
29. Dat. datur angulus A D G, dabitur ergo & H B A, quare dabitur * BH poſitione, & quoniam à dato puncto A in ipſam BH ducta eſt A H magnitu-
31. Dat. dine data, dabit * AH poſitione quoque, & propter datum angulum H B F: eſt enim rectus in ſemicircu-
29 Dat. lo, data * erit B F poſitio-
25. Dat. ne, & datũ * quoque pun-
26 Dat. ctum F, & ideo data * magnitudine H F, & quoniam æquales ſunt H D. DF. dabitur punctum D, ſed datur & punctum G,
26. Dat. ergo dabitur D G * poſitione, & magnitudine, ſed datur &
26. Dat. punctum A, ergo & AD, AE poſitione * & magnitudine datæ erunt.



Componetur autem ſic. Centro A, interuallo rectæ Z æquali deſcribatur circulus, & fiat angulus ABH æqualis dimidio anguli C, ex antecedente igitur, quod primo loco præmiſſum eſt Lẽmate, B H ſecabit ipſum circulum, ſecet in punctis H L, & per punctum H, quod ſit propius ad B, ducatur recta linea A H I, ipſi autem BH ducatur perpendicularis BF. Quoniam igitur ex antecedente, quod ſecundo loco præmiſſum eſt Lemmate, angulus H B minor eſt recto, & angulus FBH rectus: erunt ambo ſimul duobus rectis minores, & ideo coibunt rectæ lineæ AI, BF, coeant in F,

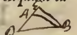


&

& ſecetur H F bifariam in D, & centro D, interuallo D H, vel D F, deſcribatur circulus, eius circumferentia tranſibit per B, propter angulum HBF rectum. Deinde producatur AB donec ſecet circulum FBH in G, & iungantur DG, FG, & ipſi AG ducatur perpendicularis DE, erunt igitur æquales BE, EG, & ideo differentia ſegmentorum AE, EG, erit ipſa AB data. Similiter quoniam æquales ſunt D H, D G vt ſemidiametri, differentiæ laterum AD, DG erit AH, cui æqualis eſt Z data ex conſtructione. Supereſt igitur vt angulus A D G aduerticem trianguli DAG æquetur angulo C; id autem ita fit manifeſtum, Quoniam enim quadrilaterum F G B H eſt in circulo, anguli H B G, H F G ex aduerſo duobus rectis erunt æquales, ſed & anguli H B G, H B A ſunt æquales duobus rectis, ergo anguli H B G, H F G angulis H B G, H B A æquales erunt; dempto communi angulo HBG, reliquus HFG reliquo HBA æqualis erit, ſed anguli H F G ad circumferentiam duplus eſt angulus H D G ad centrum, ergo & anguli H B A duplus erit angulus A D G, ſed & angulus C duplus eſt anguli H B A ex conſtructione, ergo angulus A D G angulo C æqualis erit, quod oſtendiſſe oportuit; Conſtructum eſt igitur triangulum D A G, quale conſtruendum proponebatur,

Problema XVI.

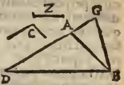
D*ATO vno ex lateribus trianguli datum verticis angulum ambientibus, & differentia inter reliquum latus, & baſim, inuenire triangulum.*

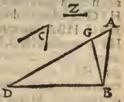


Sit datum vnum ex lateribus trianguli angulum verticis ambientibus, AB: differentia inter latus reliquum & baſim, Z, angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.

Factum iam ſit, & ſit illud triangulum ABD, cuius latus AB eſto poſitione ac magnitudine datum, differentia verò inter reliquum latus AD, & baſim DB eſto æqualis ipſi Z, & angulus D A B ad verticem æqualis angulo C. Ponatur autem D G æqualis DB, differentia igitur ipſarum AD, DB erit A G, & iungatur G B. Quoniam igitur datus eſt angulus DAB, datus erit & angulus G A B, vt reliquus è duobus rectis, hic autem in prima figura ad primum caſum pertinens, in ſecunda verò figura,

quę ad ſecundum caſum pertinet, angulus DAB idem eſt quod angulus GAB, quocunque igitur caſu datur angulus G A B: eſt
29. Dat. autem poſitione AB, ergo * poſitione eſt & AG, ſed & magni-
27. Dat tudine, ponitur enim æqualis ipſi Z, ergo * punctum G datum
26. Dat erit, ſed datum eſt & B, ergo * GB poſitione erit, & magnitudine, atque adeo dabitur angulus A G B, quia da-
39. Dat. tur * triangulum AGB ſpecie, & in ſecũda figura dabitur quoque & D G B, vt reliquus è duobus rectis, itaque in vtraque figura dabitur angulus DBG, eſt enim æqualis ipſi DGB, æqualibus
29. Dat. exiſtentibus DG, DB, quare * BD po-
25. Dat. ſitione erit, & ideo * poſitione quo-
26. Dat que, & punctum D, ac propterea * ipſæ BD, A D magnitudine quoque datæ erunt.





Componetur aũt hoc modo. Conſtituatur angulo C, æqualis angulus BAD, & ponatur ipſi Z æqualis A G, & iungatur G B, & angulo D G B æqualis conſtituatur angulus G B D, & B D occurrat ipſi A D in D, erúnt igitur D G, D B æquales, & ideo differentia inter latus AD, & baſim DB trianguli ABD, erit AG, hoc eſt Z data: eſt autem & angulus DAB ad verticem, æqualis angulo C ex conſtructione, & latus A B ipſum datum. Conſtructum eſt igitur triangulum ABD, vt facere oportebat.

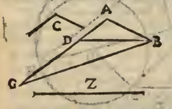
Problema XVII.

DATO vno ex lateribus tranguli datum verticis angulum ambientibus, datóque aggregato reliqui lateris & baſis; inuenire triangulum.

Sit datum vnum ex lateribus trianguli angulum verticis ambientibus A B, compoſita verò ex reliquo latere, & baſe Z, & angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.

Ponatur iam factum & ſit illud triangulum ABD, cuius latus AB eſtò poſitione ac magnitudine datum, compoſita verò ex reliquo latere A D, & baſe D B eſtò æqualis ipſi Z, & angulus aduerti-

aduerticem A æqualis angulo C. Producatur autem AD in G, vt ſit DG æqualis DB: erit igitur AG ęqualis compoſitæ ex AD, DB, & iungatur GB. Quoniam igitur poſitione eſt A B, & datus eſt angulus A, erit AG * poſitione data, ſed data eſt & ma- 29. Dat.
gnitudine, ergo & * punctum G datum erit, datur autem & B, 27. Dat.
dabitur, * ergo GB poſitione, & magnitudine, atque adeo da- 26. Dat.
bitur & angulus G, quia triangulum * ABG datur ſpecie; eſt au- 39. Dat.
tem angulo G æqualis angulus GBD, ratione æqualiũ DB, DG, quare & ipſe GBD datus erit, poſitione igitur * erit BD, quare 29. Dat.
& * punctum D. Quoniam igi- 25. Dat.
tur poſitione datarũ D B, D A dati ſunt termini A, D, B, ipſæ magnitudine quoque datæ erunt.



Componetur autem ſic, angulo C cõſtituatur æqualis angulus BAG, & ponatur AG æqualis ipſi Z, & iuncta G B, conſtituatur quoque angulus GBD æqualis angulo G, erunt igitur D B, D G æquales, addita communi DA, compoſita ex latere AD, & baſe DB trianguli ABD, æqualis erit ipſi AG, hoc eſt Z datæ: eſt autem & angulus adverticem A æqualis angulo C ex conſtructione, & latus A B ipſum datum. Conſtructum eſt igitur triangulum ABD, quod facere oportebat.

Problema XVIII.

DATO vno ex lateribus trianguli angulum rectum ambientibus; dataque differentia ſegmentorum baſis, inuenire triangulum.

Hoc Problema duos caſus habet propter duplicem lateris dati conditionem: latus enim datum intelligitur interdum minus duorum, interdum maius, ad primum igitur caſum prima figura pertinet, ad ſecundum ſecunda.

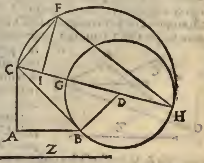


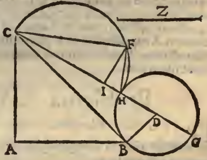
Sit datum vnum ex lateribus trianguli angulum rectum ambientibus A B, data quoque differentia ſegmentorum baſis Z. Oportet inuenire triangulum. Inclinentur ad angulos rectos AB, AC æquales, & conectatur CB, cui perpendicularis ducatur BD & æqualis dimidiæ Z, & conectatur quoque CD, &

 centro

centro D, interuallo DB deſcribatur circulus GBH, ſecans CD productam in punctis G, H, is igitur circulus tanget rectam CB in B. Deinde circa diametrum CH deſcribatur alius circulus, cui inſcribatur CF æqualis AB, & iungatur FH, & ipſi CH ducatur perpendicularis FI. Quoniam igitur CB tangit circulum GBH in B, rectangulum GCH æquale erit quadrato CB, ſed quadratũ CB duplũ eſt quadrati AB, hoc eſt quadrati CF, ergo & rectangulum GCH quadrati CF duplum erit, ſed quadrato CF æquale eſt rectangulum ICH, eſt enim* CF media proportionalis inter IC, CH: rectangulum igitur GCH duplũ erit rectanguli ICH, atque adeo CG dupla erit ipſius CI, vnde CI, IG erunt æquales; itaque differentia ſegmentorũ CI, IH erit GH, hoc eſt Z data, eſt autem & latus FC æquale ipſi AB ex cõſtructione, & angulus CFH in ſemicirculo rectus, Triangulum igitur FCH problemati ſatisfacit, quare factum eſt quod oportebat.

Ex coroll. 126.





At verò diametrum CH maiorem eſſe quam AB; in prima figura manifeſtum eſt, in ſecunda verò ſic demonſtrabitur.

Sit ſi fieri poteſt diameter CH non maior quam AB, ergo CG minor erit quam AB dupla: eſt enim HG, hoc eſt Z minor quam AB, quia differentia ſegmentorum baſis trianguli minor eſt latere maiori, quare rectangulum HCG minus erit rectangulo ſub AB, & altera ipſius dupla, hoc eſt duplo quadrati AB, ſed duplum quadrati AB æquale eſt quadrato CB, ergo rectangulum HCG minus erit quadrato CB, quod eſt abſurdum,

ſurdum, oſtenſum enim eſt in elementis ipſi æquale. Diameter igitur CH maior eſt quam AB, quod erat demonſtrandum.

CONSECTARIVM.

Primo igitur caſu, compoſita ex dimidia differentia ſegmentorum baſis, & ea quæ poteſt duplum quadrati lateris dati, plus quadrato dimidiæ differẽtiæ, æqualis eſt baſi trianguli quæſiti.

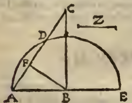
Secundo caſu, exceſſus quo prædicta potens ſuperat dimidiam ſegmentorum differentiam, æqualis eſt quæſitæ baſi.

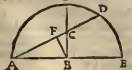
Recta enim quæ poteſt duplum quadrati lateris dati, plus quadrato dimidiæ differentiæ ſegmentorum baſis eſt CD, dimidia verò differentia DH, baſis autem CH trianguli FCH in prima figura, eſt compoſita ex CD, DH, in ſecunda verò figura baſis CH eſt exceſſus, quo CD ſuperat ipſam DH.

Sit FC in prima figura 30, GH 14, vel DH 7, erit CH 50, vnde FH 40, radix enim quadrati 1849, quod conſtat duplo quadrati ex 30, & quadrato ex 7, eſt 43, cui ſi addatur 7, fiet 50, proba ſe CH.

In ſecunda figura ſit FC 40, HG 14, vel HD 7, erit CH 50, vnde FH 30, radix enim quadrati 3249, quod conſtat duplo quadrati ex 40, & quadrato ex 7, eſt 57, exceſſus igitur quo 57, ſuperat 7, erit 50, proba ſe CH.

ALITER idem Problema hoc modo abſoluetur. Iiſdem datis, quæ prius. Duplicetur AB in E, & in AE deſcribatur ſemicirculus, & ducatur ipſi AE perpendicularis BC indefinita, in ipſa autem BC ponatur AC ſecans ſemicirculum in D, ita vt CD fiat æqualis ipſi Z: hoc enim fieri poſſe demonſtrauimus in Apollonio rediuiuo, caſu quarto, & tertio ſecundi Problematis. Denique ipſi AC ducatur perpendicularis BF, erunt igitur AF, FD æquales, & ideo differentia ſegmentorum AF, FC erit CD, hoc eſt Z data. Conſtructum eſt igitur triãgulum ABC rectangulum in B, cuius latus AB eſt ipſum datum, & CD differentia ſegmentorum AF, FC æqualis Z datæ, quod erat faciendum.



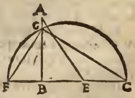


Problema

Problema XIX.

DATO vno ex lateribus trianguli angulum rectum ambientibus, datoque alterno baſis ſegmento, inuenire triangulum.

Sit datum vnum ex lateribus trianguli angulum rectum ambientibus AB, ſegmentum autem baſis alternum BC. Oportet inuenire triangulum. Inclinentur ad angulos rectos AB, BC, & ſecetur BC bifariam in E, & iungatur AE, cui æqualis ponatur EF, & in FC deſcribatur ſemicirculus, quem AB ſecet in G, & iungantur FG, GC. Quoniam igitur ſecta eſt BC bifariam in E, & illi adiecta FB, rectangulum BFC



6. Secũdi. vnà cum quadrato BE æquale *erit quadrato FE, hoc eſt AE, ſed quadratũ AE æquale eſt quadratis AB, BE, ergo rectangulum BFC vnà cum quadrato BE æquale erit quadratis AB, BE. Commune auferatur quadratum BE, reliquum

Ex coroll. 8. Sexti. igitur rectangulum BFC, hoc eſt quadratum GF (eſt enim *GF media proportionalis inter BF, FC) reliquo quadrato AB æquale erit, quare & recta GF æqualis erit rectæ AB. Conſtructum eſt igitur triangulum GFC rectangulum in G, cuius latus GF æquale eſt ipſi AB, & ſegmentum baſis alternum BC eſt ipſum datum, quod facere oportebat.

CONSECTARIVM.

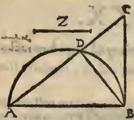
Itaque recta quæ poteſt quadrata, lateris videlicet dati, & dimidij ſegmenti, aucta dimidio ſegmento, æqualis eſt baſi trianguli, diminuta verò æqualis alteri ſegmento.

Recta enim quæ poteſt quadrata lateris dati, & dimidij ſegmenti eſt AE, hoc eſt FE, dimidium verò ſegmentum EC, vel EB: baſis igitur FC æqualis eſt FE auctæ ipſa EC, ſegmentum verò FB æquale eidem FE diminutæ ipſa EB.

Sit latus trianguli GF 15, alternum baſis ſegmentum BC 16, eius dimidium 8, erit baſis FC 25, FB alterum ſegmentum 9, vnde latus GC 20. Radix enim quadrati 289, quod conſtat quadra-

quadratis ex 15, & 8, eſt 17, cui ſi addatur 8, fiet 25 - proba ſe F C, ſi verò auferatur, relinquetur 9, pro ſegmento FB.

A L I T E R idem Problema hac ratione abſoluetur. Sit datum vnum ex lateribus trianguli angulum rectum ambientibus AB, ſegmentum baſis alternum Z, & oporteat facere quod imperatum eſt. Deſcribatur in A B ſemicirculus, & ducatur perpendicularis B C indefinita, in ipſa autem B C ponatur A C ſecans ſemicirculum in D, ita vt D C ſit æqualis ipſi Z: hoc autem quomodo fieri poſſit demonſtrauimus in Apollonio rediuiuo, caſu quinto problematis ſecundi, ſi igitur iungatur D B, triangulum ABC, erit illud de quo quæritur, eſt enim rectangulum in B ex conſtructione, & latus A B ipſum datum, atque ſegmentum baſis alternum DC æquale ipſi Z ex conſtructione, baſis enim ſegmēta ſunt A D, D C, quia B D perpendicularis eſt baſi A C, propter angulum ADB in ſemicirculo rectum, quare factum eſt quod oportebat.



Magni momenti eſſent duo problemata proximè præcedentia, ſi in omni triangulo non in rectangulo tantum conſtruerētur, primum enim opportunum eſſet ad ſectionem cuiuſlibet anguli rectilinei, vel circumferentiæ in tres partes æquales, ſecundum verò ad duplicationem cubi. Proponerentur illa duo problemata hoc modo.

Primum, Dato vno ex lateribus trianguli datum angulum verticis ambientibus, dataque differentia ſegmentorum baſis, inuenire triangulum.

Secundum, Dato vno ex lateribus trianguli datum angulum verticis ambientibus, datoque alterno baſis ſegmento, inuenire triangulum. Si hæc problemata conſtruerentur, ſecaretur vt diximus quilibet angulus rectilineus, vel circumferentia trifariam, duplicaretur cubus, atque Geometriæ defectus ſupplerentur.

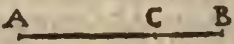
L E M M A. 15

Quadratum differentiæ duorum laterum æquale eſt quadratis laterum, minus duplo ſub ipſis rectangulo.

Sint

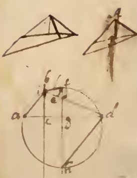
Sint duo latera AB, CB quorum differentia AC. Dico quadratum A C æquale eſſe quadratis A B, B C, minus duplo rectangulo A B C. Quoniam enim quadratum AC vna cum duplo rectangulo ABC * æquale eſt quadratis AB, CB. ablato vtrinque duplo rectangulo A B C, quadratum A C æquale erit quadratis A B, C B, minus duplo rectangulo A B C, quod erat demonſtrandum.

7. 2.

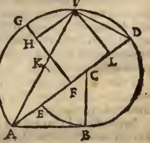


Problema XX.

DATA differentia laterum trianguli angulum rectum ambientibus, dataque perpendiculari, inuenire trangulum.



Sit data differentia laterum trianguli angulum rectum ambientibus A B, data quoque perpendicularis B C. Oportet inuenire triangulum. Inclinentur ad angulos rectos AB, BC, & conectatur A C, & centro C, interuallo C B deſcribatur circulus, ſecans A C continuatam in punctis E, D, is igitur circulus tanget ipſam AB in B: deinde fiat A D diameter alterius circuli A G D, ex cuius centro F ducatur perpendicularis F G, & ſumatur F H æqualis C D, vel C B, & ipſi A D parallela agatur H I, ſecans circulum AGD in I, & conectantur AI, ID, & ipſi A D ducatur perpendicularis I L, & ſumatur I K æqualis I D. Quoniam igitur parallelogrammum eſt HILF, erit I L perpendicularis trianguli I A D, æqualis HF; hoc eſt ipſi CB, eſt autem & angulus A I D in ſemicirculo rectus; ſupereſt igitur vt A K differentia laterum IA, I D æquetur ipſi A B, id autem ita fit manifeſtum.



Quoniam enim laterum IA, ID differentia eſt A K, quadratum A k ex antecedente Lemmate æquale erit quadratis A I, ID, minus duplo rectangulo A I D, ſed quadrata AI, I D æqualia ſunt

lia ſunt quadrato AD, & duplum rectangulum AID æquale duplo rectangulo AD, IL: eſt enim propter ſimilitudinem triangulorum IAD, ILD, vt AI ad AD, ita IL ad ID & ideo rectangulum AID ſub extremis, æquale rectangulo AD, IL ſub medijs: quadratum igitur Ak æquale erit quadrato AD, minus duplo rectangulo AD, IL, hoc eſt minus rectangulo ADE: eſt enim DE dupla ipſius IL, ſed quadratum AD minus rectangulo ADE idem eſt quod rectangulum DAE, ergo quadratum Ak, æquale erit rectangulo DAE, hoc * eſt quadrato AB, vnde & recta Ak æqualis rectæ AB, quod oſtendiſſe oportuit. Constructum eſt igitur triangulum IAD rectangulum in I, cujus laterum IA, ID differentia AK, æqualis eſt ipſi AB, & perpendicularis IL æqualis BC, quod faciendum erat. 36. Tertij

CONSECTARIUM.

Itaque compoſita ex perpendiculari, & ea cuius quadratum æquale eſt quadratis differentiæ laterum, & perpendicularis æqualis eſt baſi trianguli quæſiti.

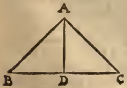
Recta enim cuius quadratum æquale eſt quadratis Ak, IL, hoc eſt AB, BC eſt AC, compoſita verò ex IL, hoc eſt ex CD, & ex ipſa AC eſt AD, baſis trianguli IAD.

Sit AK 5, IL 12, erit AD 25, vnde IA 20, ID 15. Radix enim quadrati 169, quod conſtat quadratis ex 5, & 12, eſt 13, cui ſi addatur 12, fiet 25, probaſe AD.

LEMMA 16

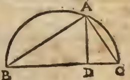
Quadratum aggregati laterum trianguli, angulum rectum ambientium, non eſt minus octuplo eius quod à perpendiculari fit quadrati.

Sit triangulum ABC, in quo perpendicularis AD cadat in baſim BC, ab angulo recto BAC. Dico quadratū compoſitæ ex BA AC non eſſe minus, octuplo quadrati AD: aut enim æqualia ſunt latera AB AC, aut inæqualia, ſint primum æqualia, ergo & BD DA DC erunt quoque æquales, & ideo quadratum AB duplum erit quadrati AD, ſed

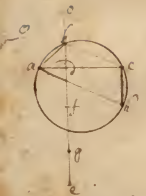


quadrati A B quadruplum eſt quadratum compoſitæ BAC, ergo quadratum ipſius BAC compoſitæ octuplum erit quadrati AD, non autem minus.

Sed ſunto latera A B, A C inæqualia, ergo & B D, D C erunt inæquales, deſcribatur autem in B C ſemicirculus B A C, eius circumferentia tranſibit per A, propter angulũ BAC rectum. Quoniam igitur inæquales ſunt BD, D C, ipſa DA non erit ex centro circuli, & ideo BC maior erit quam AD dupla, & conſequenter quadratum B C maius quadruplo quadrati A D, eadem ratione, & rectangulum B C, A D maius erit duplo quadrati AD, & conſequenter duplum rectanguli BC, A D maius quadruplo quadrati A D; ergo quadratum BC, vnà cum duplo rectanguli B C, A D maiora erunt octuplo quadrati A D, ſed quadratum BC æquale eſt quadratis A B, A C, & duplũ rectanguli B C, A D æquale duplo rectanguli B A C: eſt enim propter ſimilitudinem triangulorum ABC, DAC, vt BC ad BA, ita AC ad AD, & ideo rectangulum ſub extremis B C, A D æquale rectangulo B A C ſub medijs: quadrata igitur BA, A C, vnà cum duplo rectanguli BAC, hoc eſt quadratum compoſitæ BAC maius erit octuplo quadrati AD, non autem minus. Quare cõſtat propoſitum.



Problema XXI.

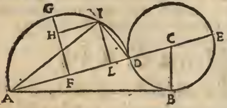


DATO aggregato laterum trianguli angulum rectum ambientium, dataque perpendiculari, inuenire triangulum.

Sit datum aggregatum laterum trianguli, angulum rectum ambientium A B, data quoque perpendicularis B C. Oportet inuenire triangulum. Inclinentur ad angulos rectos AB, BC, & conectatur A C, & centro C, interuallo C B deſcribatur circulus, ſecans A C continuatam in punctis E, D, is igitur circulus tanget ipſam A B in B. Deinde fiat A D diameter alterius circuli A G D ex cuius centro F ducatur perpendicularis F G, & ſumatur F H æqualis C D, vel C B: inferius demonſtrabitur ipſam F G non eſſe minorem quam B C, acta denique ipſi A D

parallela

parallela HI, ſecans circulum A G D in I, conectantur AI, ID, & ipſi AD ducatur perpendicularis IL, ea erit æqualis HF, hoc eſt ipſi B C, & angulus A I D in ſemicirculo rectus: reliquum igitur eſt vt compoſita ex lateribus A I, ID oſtendatur æqualis ipſi AB, id autem ita fiet.



Quoniã enim quadratum compoſitæ AID æquale eſt quadratis A I, I D, vnà cum duplo rectãgulo A I D, quadrata autem A I, I D æqualia ſunt quadrato A D, & duplum rectangulum AID æquale duplo rectangulo A D, IL: eſt enim propter ſimilitudinem triangulorum IAD, ILD, vt A I, ad AD, ita IL, ad ID, & ideo rectangulum AID ſub extremis æquale rectangulo ſub medijs AD, IL: quadratum igitur compoſitæ AID æquale erit quadrato A D, vnà cum duplo rectangulo AD, IL, hoc eſt vnà cum rectangulo ADE, eſt enim D E dupla ipſius IL, ſed quadratũ AD, vnà cum rectangulo ADE, æquale eſt rectangulo DAE, ergo quadratum compoſitæ AID æquale erit rectangulo D A E, hoc eſt * quadrato A B, vnde & 36. Tertij ipſa compoſita æqualis ipſi A B, quod oſtendiſſe oportuit. Constructum eſt igitur triangulum IAD rectangulum in I, cuius laterum AI, ID aggregatum æquale eſt ipſi A B, & perpendicularis IL æqualis ipſi BC, quod erat faciendum.

At verò ipſam FG non eſſe minorem quam BC, ita demonſtrabitur. Quoniam enim quadratum AB ex antecedẽte Lemmate, non eſt minus octuplo quadrati B C, quadrata A B, B C, hoc eſt quadratum A C non erit minus nonuplo quadrati B C; ergo & recta AC non erit minor quam tripla BC, auferatur ex AC recta DC, quæ æqualis eſt ipſi BC, reliqua igitur AD, non erit minor quam dupla B C, neque dimidia A D, hoc eſt ipſa FG minor erit, quam ipſa BC, quod erat demonſtrandum.

CONSECTARIVM.

Itaque differentia inter perpendicularem, & eam cuius qua-

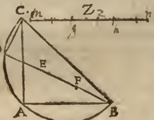
dratum æquale eſt quadratis compoſitæ ex lateribus, & perpendicularis, æqualis eſt baſi trianguli quæſiti.

Differentia enim inter perpendicularem BC, hoc eſt CD, & ipſam AC. rectam videlicet cuius quadratum æquale eſt quadratis AB. BC, eſt AD, baſis trianguli IAD.

Sit compoſita ex AI. ID, hoc eſt ipſa AB 35, IL ſeu BC 12. Erit AD 25, vnde IA 20, ID 15, differentia enim inter 12, & 37, radicem videlicet quadrati 1369, quod conſtat quadratis ex 35, & 12, eſt 25, quæ indicat baſim trianguli quæſiti.

Problema XXII.

DATIS duabus rectis lineis inæqualibus quam maior non excedat diametrum quadrati ex minore deſcripti, maiorem ita ſecare, vt partium quadrata ſimul æqualia ſint quadrato minoris.



Sint datæ duæ rectæ lineæ, Z quidem maior, AB minor. Oportet ipſam Z, in duas partes ſecare, ita vt partium quadrata, ſimul æqualia ſint quadrato AB. Ducatur ipſi AB perpendicularis, & æqualis AC, & iſta CB, fiat diameter circuli CAB, in quo accommodetur BD æqualis ipſi Z, ex determinatione enim Problematis ipſa Z non eſt maior quam CB, deinde iungatur CD, cui æqualis ponatur DE, & ſecetur bifariam EB in F. Quoniam igitur BE ſecta eſt bifariam in F, & illi adiecta ED, quadrata DB, DE dupla * erunt quadratorum DF, FB, ſed quadrata DB, DE: hoc eſt DB, DC æqualia ſunt quadrato CB propter angulum CDB in ſemicirculo rectum, ergo & quadratum CB duplum erit quadratorum DF, FB, ſed duplum eſt & quadrati AB, ergo quadrata DF, FB quadrato AB æqualia erunt. Secta eſt igitur DB, cui æqualis eſt Z data in F, ita vt quadrata partium DF, FB æqualia ſint quadrato AB, quod facere oportebat.

* Secūdi.

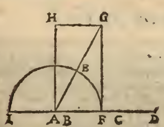
CONSECTARIVM.

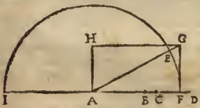
Itaque exceſſus, quo duplum quadrati à linea minore ſuperat quadratum à maiore, æqualis eſt quadrato differentiæ partium maioris.

Sit Z, vel DB 17, AB 13, erit DF 12, FB 5. Exceſſus enim quo duplum quadrati ex 13, quod eſt 338, ſuperat quadratũ ex 17, nempe 289, eſt 49, quadratum videlicet ipſius DE differentiæ partium D F, F B, vnde ipſa DE erit 7, reliqua verò EB 10, eius dimidia FB 5, DF 12.

Problema XXIII.

DATIS duobus exceſſibus quibus diameter parallelogrammi [illegible] vtrunque latus ſuperat, inuenire parallelogrammum.





Sint dati duo exceſſus AB, BC, quibus diameter parallelagrammi rectanguli excedit latera. Oportet inuenire parallelogrammũ. Ponãtur in directum AB, BC, & fiat duplo rectanguli A B C æquale quadratum CD, & ponatur D F æqualis B C, & ipſi AD ducatur perpendicularis FG ipſi verò BD æqualis, & compleatur parallelogrammũ A F G H, cuius diameter AG; & centro A, interuallo AF deſcribatur circulus, quem ſecet AG in E, ipſa verò producta in I. Quoniam igitur duplum rectanguli A B C æquale eſt quadrato CD ex conſtructione, addito communi quadrato B C, vnà cum duplo rectanguli F B C, duplum rectangulorum A B C, F B C, vnà

cum

cum quadrato BC, hoc eſt FD, æqualia erunt quadratis BC, CD, vnà cum duplo rectanguli F B C, hoc eſt B CD: ſunt enim B F, C D æquales, quia B C æqualis eſt F D, & C F vtrique communis, ſed duplum rectangulorum ABC. FBC æquale eſt rectangulo ſub B C hoc eſt F D, & compoſita ex duplis A B, B F, hoc eſt rectangulo IFD: ergo rectangulum I F D, vnà cum quadrato F D, hoc * eſt rectangulum I D F æquale erit quadratis B C,
3. Secũdi. CD, vnà cum duplo rectanguli BCD, hoc eſt * æquale erit qua-
4. Secũdi drato B D, vel F G, addatur commune quadratum A F, rectan-
5. Secũdi gulum igitur IDF, vnà cum quadrato AF, hoc * eſt quadratum AD æquale erit quadratis AF, FG, hoc eſt quadrato A G, quare & recta A D æqualis erit rectæ A G: ablatis igitur æqualibus AF, AE, reliqua FD, hoc eſt BC reliquæ E G æqualis erit. Parallelogrammi igitur A F G H diameter A G excedit latus A F exceſſu EG æquali ipſi BC, excedit autem & alterum latus F G exceſſu æquali A B, ipſa enim A D, cui æqualis eſt diameter AG, excedit ipſam BD, hoc eſt latus F G exceſſu AB. Constructum eſt igitur parallelogrammum rectangulum A F G H, vt facere oportebat.

CONSECTARIVM.

Itaque, recta cuius quadratum, duplum eſt rectanguli ſub exceſſibus datis aucta exceſsu maiori, efficit latus maius parallelogrammi quæſiti, aucta verò minori exceſſu, latus minus efficit, aucta denique vtroque exceſſu efficit diametrum.

Recta enim D C aucta exceſſu C B æqualis eſt lateri F G, aucta verò vtroque exceſſu C B, B A, æqualis diametro G A, ac denique recta D C, hoc eſt F B aucta exceſſu B A, eſt ipſum latus F A.

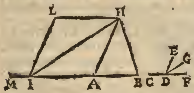
Sit minor exceſſus 2, maior 9, erit latus maius parallelogrãmi quæſiti 15, latus minus 8, diameter 17, duplum enim rectanguli ſub exceſſibus 2, & 9, eſt 36, radix verò quadrata numeri 36, eſt 6, quæ aucta exceſſu 9, fit 15, pro latere maiori, aucta verò exceſſu 2, fit 8, pro latere minori, aucta denique vtroque exceſſu 2, & 9, fit 17, pro diametro.

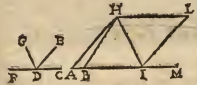
Problema XXIV.

DATO vno ex angulis rombi, & differentia inter eius latus, & diametrum, inuenire rombum.

Sit

Sit datus vnus ex angulis rombi,æqualis angulo CDE, differentia autem inter eius latus, & diametrum A B. Oportet inuenire rombum. Si angulus datus ſit is quem diameter ſecat, reliquus è duobus rectis erit angulus quem diameter ſubtēdit. Itaque dato vno dabitur alter. Sit igitur datus angulus C D E æqualis ei quem diameter ſubtendit, & producatur C D in F, & ſecetur bifariam angulus F D E recta linea D G, ſi igitur angulus CDE maior ſit dimidio anguli CDG, producatur A B ad





partes A, ſi verò ſit minor, producatur ad partes B, æqualis autem dimidio nō poteſt eſſe, quia nullus eſſet exceſſus inter latus rōbi, & diametrum, quod nō ponitur. Producta igitur AB, vt dictum eſt in M, fiat dimidio anguli CDG, æqualis angulus MBH, & angulo CDE æqualis angulus MAH, & conueniant A H, B H, in H: conuenient enim, vt inferius demonſtrabitur. Rurſus angulo MBH ęqualis conſtituatur angulus BHI, & compleatur parallelogrammum IAHL, cuius diameter IH. Quoniam igitur angulus MIH externus tranguli HIB, æqualis eſt duobus internis angulis IHB, IBH, quibus etiam æqualis eſt angulus CDG: vterque enim eſt eius dimidius ex conſtructione; erit angulus MIN angulo CDG æqualis, quare & angulus HIB angulo GDF Quoniam igitur angulus MIH oſtenſus eſt æqualis angulo CDG, & eſt quoque æqualis duobus internis angulis MAH. IHA, angulus CDG, hoc eſt duo anguli CDE, EDG duobus MAH, IHA erunt æquales, demptis æqualibus angulis CDE, MAH, reliquus EDG, hoc eſt GDF reliquo IHA æqualis erit, ſed oſtenſus eſt angulus GDF æqualis angulo HIB, hoc eſt HIA, ergo & angulus IHA angulo HIA, erit æqualis; quare & latus AH lateri A I, ſed lateri AH æquale eſt I L. & lateri AI æquale H L. quia parallelogrammum eſt A I L H, ergo latera AI, IL, LH HA erunt interſe æqualia, parallelogrammum igitur AI, LH, rombus eſt, & angulus I A H quem ſubtendit diameter, æqualis eſt angulo C D E ex conſtructione. Et quoniam

anguli

anguli HBI, BHI ſunt æquales ex conſtructione, erunt & rectæ IH, IB æquales, ſed IB differt ab IA per AB; ergo & IH differet ab ipſa IA per eandem AB. Conſtructus eſt igitur romb. IAHL, vt facere oportebat.

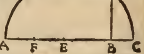
At verò rectas AH, BH conuenire ſic demonſtrabitur. Angulus C D E in prima figura, hoc eſt M A H maior eſt dimidio anguli C D G hoc eſt angulo M B H, ſed angulus M A H, vnà cum angulo H A B duobus rectis ſunt æquales, ergo angulus H A B, vnà cum angulo H B A duobus rectis erunt minores, & ideo conuenient A H, B H, quod erat demonſtrandum.

In ſecunda figura, angulus C D E, hoc eſt M A H minor eſt dimidio anguli CDG, hoc eſt angulo MBH, ſed angulus HBA, vnà cum angulo H B M æquales ſunt duobus rectis, ergo angulus HBA, vnà cum angulo HAB duobus rectis erunt minores, quocunque igitur caſu conueniunt AH, BH, quod erat demonſtrandum.

Problema XXV.

DATAM rectam lineam ſecare, ita vt rectangulum ſub partibus comprehenſum æquale ſit ei, quod à differentia partium ſit quadrato.

Sit A B data recta linea ſecanda in duas partes, ita vt rectangulum ſub partibus comprehenſum, æquale ſit quadrato differentię partium. Producatur A B in C, vt ipſa AB ſit quintupla ipſius B C; & in A C deſcribatur ſemicirculus A D C, & ex B educatur perpendicularis BD, cui



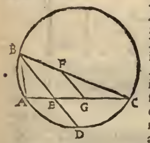
æqualis ponatur B E, & ſecetur A E bifariam in F, differentia igitur partium A F, F B erit E B, & quoniam A B quintupla eſt ipſius BC, quintuplum rectanguli ABC, hoc eſt quintuplũ quadrati BD æquale erit quadrato AB, ſed quadratum AB ęquale* eſt quadrato E B, vnà cum quadruplo rectanguli F F B, hoc eſt A F B, ergo quintuplum quadrati B D, hoc eſt F B æquale erit quadrato E B, vna cum quadruplo rectanguli A F B: auferatur commune quadratum FB, quadruplum igitur rectanguli AFB quadruplo quadrati EB æquale erit, & conſequenter ſimplum ſimplo. *8. Secũdi,*

ſimplo. Secta eſt igitur A B in F, & ita vt rectangulum A F B ſub partibus æquale ſit quadrato E B, differentiæ videlicet partium A F, F B, quod erat faciendum.

Problema XXVI.

CIRCVLI portione data, inuenire punctum in eius circumferentia, à quo cum ducentur duæ rectæ lineæ, ad extrema baſis portionis puncta, rectangulum ſub ipſis comprehenſum æquale erit differentiæ ipſarum quadrato.

Sit data circuli portio ABC, cuius baſis AC. Oportet inuenire punctum in circumferentia A B C, à quo cum ducentur duæ lineæ rectæ ad puncta A, C, rectangulum ſub ipſis comprehenſum æquale ſit quadrato differentiæ ipſarum. Compleatur circulus ABCD, & circumferentia ADC ſecetur bifariam in D, & ſecetur * quoque AC, in E, ita vt rectangulum AEC, ſit æquale *Ex antec.* quadrato differentiæ ipſarum A E, E C, & iuncta D E producatur in B, & iungantur quoque AB. BC, & ſumantur B F, E G, æquales ipſis BA, AE, vtraque vtrique: differentia igitur rectarũ AB, B C, erit F C, ipſarum quoque AE, EC differentia erit GC. Et quoniam æquales ſunt anguli A B D, D B C æqualibus circumferentijs inſiſtentes, *erit A E ad E C, ſicut *3. Sexti.* AB, ad BC: ſed AE, AB ęquales ſunt ipſis EG, BF, vtraque vtrique ex cõſtructione, ergo vt E G, ad E C, ita erit B F, ad B C, & per conuerſionẽ rationis vt E G, ad G C, ita erit B F, ad FC, iuncta igitur FG, parallela * *2. Sexti.*



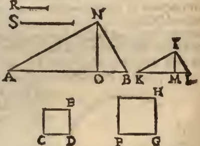
erit ipſi BE. Et quoniam rectangulum AEC, hoc eſt GEC æquale eſt quadrato GC ex conſtructione, erit EG, ad GC, ſicut GC, ad EC, ſed oſtenſum eſt vt EG, ad GC, ita eſſe BF, ad FC, ergo vt BF, ad FC, ita erit GC, ad EC, ſed ratione parallelarum FG, BE, eſt vt GC, ad EC, ſicut FC, ad BC, ergo vt BF, hoc eſt BA, ad FC, ita erit FC, ad BC, rectangulum igitur ABC ſub extremis æquale erit quadrato mediæ F C. Inuentum eſt igitur punctum B in circumferentia, à quo cum ducentur duæ rectæ lineæ B A,

B C, ad extrema baſis puncta A, C, rectangulum A B C, æquale erit quadrato F C, differentiæ videlicet ipſarum AB, BC, quod faciendum erat.

Problema XXVII.

DATAM rectam lineam ita ſecare, vt rectangulum, quod tota, & altera parte continetur ad quadtatum partis reliquæ, datam habeat rationem.

Euclides Propoſitione vndecima libri ſecundi, Elementorũ docet lineam rectam ſecare, vt rectangulum ſub tota, & altera parte ſit æquale quadrato partis reliquæ, at verò vt habeat eam quæ ponitur rationem, ſic erit ſecanda.



Sit data recta linea A B, quã oportet ſecare, vt rectangulum ſub tota, & altera parte ad quadratum partis reliquæ rationẽ habeat vt R, ad S. Exponatur aliquod quadratum CDE, & fiat vt R, ad S, ita quadratum C D E ad quadratum FGH: deinde inueniatur triangulum rectangulum habens vnum ex lateribus angulum rectum ambientibus, æquale ipſi CD, & ſegmẽtum baſis alternum æquale ipſi FG, id enim iam docuit Problema decimum nonum. Sit igitur illud triangulum I K L rectangulum in I, in quo perpendicularis IM, ſit autem latus IL æquale ipſi CD, ſegmentum KM alternum æquale ipſi FG, & ſuper datam AB, triangulo I K L ſimile ſimiliterque poſitum conſtituatur triãgulum NAB, à cuius angulo recto ANB demittatur perpendicularis N O. Quoniam igitur ſimilia ſunt triangula NAB, IkL ſimiliterque poſita, erit angulus A æqualis angulo k, & angulus B æqualis angulo L, & anguli ad O, & M ſunt recti, & ideo æquales: erit triangulũ NOA ſimile triangulo IMK, & triangulum NOB ſimile triangulo I M L, & ob id vt NB, ad NO, ita erit IL, ad IM, & vt NO, ad OA, ita IM, ad MK, quare ex æquali vt NB, ad AO, ita erit IL, ad MK.

Et

Et quoniam eſt vt CD, ad IL, ita FG, ad kM, æqualis videlicet ad æqualem, erit permutando vt CD, ad FG, ita IL, ad KM, ſed & NB, ad AO, eſt ſicut IL, ad Mk, vt eſt demonſtratum: ergo vt CD, ad FG, ita erit NB, ad AO, & conſequenter vt quadratum CD, ad quadratum FG, ita quadratum NB, ad quadratum AO, ſed quadratum NB * æquale eſt rectangulo ABO: eſt enim * NB media proportionalis inter AB, BO, ergo vt quadratum CD ad quadratum FG, hoc eſt vt R, ad S, ita erit rectangulum ABO, ad quadratum AO, ſecta eſt igitur AB, in O, vt facere oportebat. *17. Sexti.* *Ex coroll. prop. 8. Sexti.*



ALITER quoq; hoc Problema abſoluemus.

Sit AB data recta linea ſecanda: ratio autem rectãguli ſub tota, & altera parte ad quadratum partis reliquæ ſit vt ED, ad DC. Ponantur in directũ ED, DC, & in EC deſcribatur ſemicirculus EFC, ipſiq; EC ducatur perpendicularis DF, & ſecetur FD biſariam in H, & iungatur EH, & centro H, interuallo HE deſcribatur circulus, ſecans FD productam in punctis G, I, & fiat vt GD, ad DE, ita AB, ad Bk: deſcribatur autem in AB ſemicirculus ALB, in quo accommodetur ipſi Bk, æqualis BL, & demittatẽ ad AB perpẽdicularis LM. Quoniam igitur æquales ſunt GH, HI, & æquales quoque FH, HD, erunt & reliquæ GF, DI æquales. Et quoniam eſt vt GD, ad DE, ita AB, ad Bk, hoc eſt ad BL: erit vt quadratum GD, ad quadratum DE, ita quadratum AB, ad quadratum BL, ſed quadratum GD ad quadratum DE, eſt ſicut GD, ad DI, & quadratum AB ad quadratum BL, ſicut AB, ad BM, eſt enim * quadratum primæ trium proportionalium ad quadratum ſecundæ, ſicut prima ad tertiam, ergo vt GD, ad DI, hoc eſt ad FG, ita erit AB, ad BM, per conuerſionem rationis, vt GD, ad FD, ita AB ad AM, & permutando vt GD, ad AB, ita erit FD, ad AM. *Ex coroll. prop. 20. 6.*

Rurſus quoniam eſt vt GD ad DE, ita AB ad BL, erit permutando vt GD ad AB, ita DE ad BL, ſed oſtẽſum eſt vt GD ad AB, ita eſſe FD ad AM, ergo vt DE ad BL, ita erit FD ad AM, & permutando, vt DE ad FD, ita BL ad AM, & vt quadratum DE ad quadratum FD, ita quadratum BL ad AM, quadratum, ſed quadratum BL * æquatur rectangulo ABM, eſt * enim BL media proportionalis inter AB & BM, vt igitur quadratũ DE ad qua- *17. Sexti* *Coro. pro 8. Sexti*

H 2 dratum

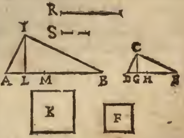
dratum FD, hoc eſt vt ED ad DC: prima nempe ad tertiã trium proportionalium, ita erit rectangulum ABM ad quadratũ. AM Secta eſt igitur AB data in M, vt ſecanda proponebatur.

Problema XXVIII.

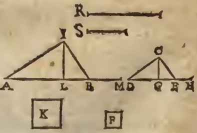
DATAM rectam lineam ſecare, vt rectangulum ſub tota, & altera parte ad quadratum differentiæ partium, rationem habeat datam.

Hoc Problema duos caſus habet, vel enim ſecanda proponitur data recta linea, vt rectangulum ſub tota, & parte maiori, vel & parte minori ad quadratum differentiæ partium rationẽ habeat datam: primo caſu oportebit terminum datæ rationis primum, maiorem eſſe ſecundo: rectangulum enim ſub tota, & parte maiori, maius eſt quadrato differentiæ partium, cum vtraque, tota videlicet, & pats maior: maiores ſint quam partium differentia.

Secundus caſus nulla indiget determinatione, rectangulum enim ſub tota, & parte minori poteſt eſſe maius prædicto quadrato, & minus.

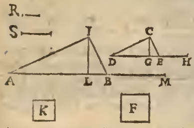


Sit igitũ data recta linea AB ſecãda in duas partes, vt rectangulum ſub tota, & altera parte ad quadratum differentiæ partium, rationem habeat vt R, ad S. Exponatur aliquod quadratum k, & fiat vt R ad S, ita K quadratum, ad aliud quadratum quod ſit Flatus: autẽ quadrati k intelligatur vnum ex lateribus triãguli angulum rectum ambiẽtibus, maius videlicet in prima figura, quæ ad primum caſum pertinet, minus in ſecunda, & tertia, quæ pertinẽt



ad

ad ſecundum caſum, latus verò quadrati F intelligatur differẽtia ſegmentorum baſis. Itaque dato vno ex lateribus trianguli angulum rectum ambientibus, & differentia ſegmentorum baſis, inueniatur triangulum, id enim iam docuit Problema decimumoctauum. Sit igitur illud triangulũ CDE, in quo perpẽdicularis CG ab angulo recto demiſſa ſecet baſim in duo ſegmenta D G, GE, quorum differentia E H ſit æqualis lateri quadrati F, & latus CE æquale lateri quadrati K: denique deſcribatur in AB triangulum I A B triangulo CDE ſimile ſimiliterque poſitum, à cuius angulo recto demiſſa in baſim perpendicularis IL ſecet eam in duo ſegmenta AL, LB, quorũ differentia ſit M B. Quoniam igitur ſimilia ſunt triãgula I A B, C D E, erit angulus A æqualis angulo D, & angulus I B L æqualis angulo CEG, atque anguli ad L, & G, ſunt recti, & ideo æquales, ergo triangulum I L B



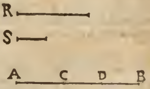
ſimile erit triangulo CGE, & triãgulum ILA triangulo CGD, & propter ſimilitudinem erit vt BL ad LI, ita EG ad GC, & vt LI ad LA, ita GC ad GD, ergo ex æquali erit vt BL ad LA: hoc eſt ad LM, ita EG ad GD, id eſt ad GH, & per conuerſionem rationis vt BL ad BM, ita erit EG ad EH.

Et quoniam propter triangulorum ſimilitudinem eſt vt IB ad BL, ita CE ad EG, & vt BL ad BM, ita EG ad EH, vt eſt demõſtratum, erit ex æquali vt IB ad BM, ita CE ad EH: hoc eſt ita latus quadrati k ad quadrati F latus, vt igitur quadratum I B ad quadratum M B, ita erit K quadratum ad F quadratum, ſed K quadratum ad F quadratum eſt, vt R ad S: ergo vt R ad S, ita erit quadratum IB ad MB, quadratum, ſed quadratum IB * æquale eſt rectangulo ABL, eſt enim IB * media proportionalis inter AB, LB, ergo vt R ad S, ita erit rectangulũ ABL ad quadratum MB. Secta eſt igitur AB in L, vt facere oportebat. 17.6. Ex coroll. 8.6.

Problema XXIX.

DATAM rectam lineam, ita ſecare, vt rectangulum ſub tota, & differentia partium ad quadratum differentiæ,

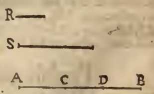
rentiæ, rationem habeat datam. Oportet autem datæ rationis terminum primum maiorem eſſe ſecundo : rectāgulum enim ſub tota, & differentia partium maius eſt quadrato prædictæ differentiæ.



Sit AB data recta linea ſecāda, ita vt rectāgulum ſub ipſa AB, & differentia partium ad quadratū ipſius differentiæ, rationem habeat vt R ad S, cuius rationis terminus R ſit maior quam S. Sece-
10. Sexti. tur * AB in C, vt ſit AB ad AC, ſicut R ad S, ipſa verò CB ſecetur bifariam in D, itaque differentia partiū AD DB, erit AC. Quoniam igitur rectangulum BAC, & quadratum AC eandem ha-
1. Sexti. bent altitudinem AC, erit * vt AB ad AC, ita rectangulū BAC ad AC quadratum, ſed AB ad AC, eſt ſicut R ad S, ergo vt R ad S, ita erit rectangulum BAC ad AC quadratum, Secta eſt igitur AB in D, vt facere oportebat.

Problema XXX.

D*ATAM rectam lineam ita ſecare, vt rectangulum ſub tota, & differentia partium, ad quadratum totius, rationem habeat datam. Oportet autem datam rationem eſſe minoris ad maius : rectangulum enim ſub tota, & differentia partium minus eſt totius lineæ quadrato.*

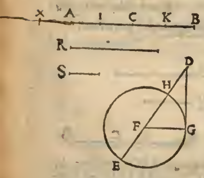


Sit data recta linea AB quā oportet ſecare, vt rectāgulum ſub tota, & differētia partium ad quadratum totius AB rationē habeat vt R ad S, cuius rationis terminus R ſit minor quam S. Fiat vt S ad R, ita AB ad AC, & ſecetur CB bifariam in D. Quoniam igitur vt S ad R, ita eſt AB ad AC, erit conuertendo vt R ad S, ita AC ad AB, ſed vt AC ad AB, ita eſt rectangulum BAC ad quadratum AB,

AB, eandem enim habent altitudinem AB, vt igitur R ad S, ita erit rectangulum BAC ad AB quadratum: eſt autem rectangulum B A C illud quod tota A B, & differentia partium A D, DB continetur, quia ipſarum partium differentia eſt AC, ſunt enim CD, DB æquales. Secta eſt igitur AB in D, vt facere oportebat.

Problema XXXI.

DATAM rectam lineam ita ſecare, vt rectangulum ſub tota, & differentia partium ad rectangulum ſub partibus, datam habeat rationem.



Sit data linea recta A B quam oportet ſecare, vt rectangulum ſub tota, & differentia partium ad rectangulum ſub partibus rationem habeat vt R ad S. Secetur A B bifariam in C, & fiat vt R ad S, ita AB ad aliam quæ ſit FG: ipſi autem FG ducatur perpendicularis G D, ipſi verò A C æqualis, & conectatur FD, & cētro F, interuallo FG deſcribatur circulus, quem ſecet DF continuata in punctis E, H, & ponantur ipſi H D æquales CK, CI. Quoniã igitur ęquales ſunt AC, CB, & æquales quoque IC, Ck, fiunt æquales & reliquæ AI, kB, & ideo differentia inter A k, K B erit I k. Et quoniam AB ſecta eſt in partes æquales in C, & inæquales in k, rectangulum AkB vnà cum quadrato CK æquale * erit quadrato AC: hoc eſt DG, ſeu quod idem eſt rectangulo EDH, recta enim DG tangit circulum in G, ſed rectãgulũ EDH æquale * eſt rectangulo EHD vnà cum quadraro HD, ergo rectangulum AKB, vnà cum quadrato Ck æquale erit rectãgulo EHD, vna cum quadrato HD: auferantur æqualia quadrata C K. HD, reliquum igitur rectangulum AkB reliquo rectangulo EHD æquale erit. 3. Secũdi. 3. Secũdi.

Et quoniam eſt vt R ad S, ita AB ad FG, hoc eſt ad FH, vt autem AB ad FH, ita rectangulum AB CK ad rectangulum FHD: æquales enim habent altitudines Ck, HD, erit vt R ad S, ita rectangulum

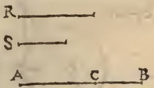
BAC ad AKB, ut BA ad AK hoc est X AC = AK
fiat ZX = 2ax, et ZC
AB et CK = KB.
nam ablato AC erit
2AC hoc est XAC quater
= AKC quater, et XAC
AKC. q.e.f.

ctangulum AB, Ck ad rectangulum FHD, & conſequenter ita duplum rectanguli AB, Ck ad duplum rectanguli FHD, hoc eſt ita rectangulum AB, Ik ad rectangulum EHD, ſed rectangulũ EHD oſtenſum eſt æquale rectangulo AkB, ergo vt R ad S, ita erit rectangulum AB, Ik ad rectangulum AKB. Secta eſt igitur AB in k, vt facere oportebat.

Problema XXXII.

DATAM rectam lineam ita ſecare, vt rectangulum ſub tota, & altera parte ad rectangulum ſub partibus, rationem habeat datam. Oportet autem datæ rationis terminum primum maiorem eſſe ſecundo: rectaugulum enim ſub tota, & altera parte maius eſt rectangulo ſub partibus.

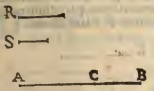
Sit data recta linea AB ſecãda
in duas partes, vt rectangulũ ſub
tota, & vna parte ad rectãgulum
ſub partibus, rationem habeat vt
R ad S, cuius rationis terminus R
10 Sexti. ſit maior quã S. Secetur * AB in
C, vt ſit A B ad A C, ſicut R ad S,
ergo factum erit quod proponitur: eſt enim vt AB ad AC, ita rectangulum ABC ad rectangulũ ACB propter eandem altitudinem CB, ſed AB ad AC eſt ſicut R ad S, ex cõſtructione, ergo vt R ad S, ita erit rectangulũ ABC ad ACB rectangulũ. Secta eſt igitur AB in C, vt faciendum erat.



Problema XXXIII.

DATAM rectam lineam ita ſecare, vt rectangulum ſub tota, & vna parte ad rectangulum ſub tota, & altera parte, rationem habeat datam.

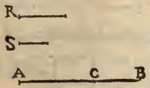
Sit AB data recta linea ſecanda in duas partes, ita vt rectãgulum ſub tota, & vnã parte ad rectangulũ ſub tota, & altera parte rationem habeat vt R ad S. Hoc autem nihil aliud eſt niſi ipſam AB ſecare in duas partes, ita vt partium ratio ſit eadẽ quæ R ad S,

R ad S, ſecetur * enim in C, vt ſit AC ad CB, ſicut R ad S. Quo- 10. Sexti.


niã igitur rectangula BAC, ABC eandem habent altitudinem AB, erit vt AC ad CB, ita rectãgulum BAC ad rectangulũ ABC, ſed AC ad CB, eſt ſicut R ad S, ex conſtructione; ergo vt R ad S, ita erit rectangulum BAC ad ABC, rectangulum. Punctum igitur C Problema efficit, quare factum eſt quod oportebat.

Problema XXXIV.

DATAM rectam lineam ita ſecare, vt quadratum alterius partis ad rectangulum ſub partibus, rationem habeat datam.



Sit AB ſecanda in duas partes, ita vt quadratũ alterius partis, ad rectãgulum ſub partib. rationem habeat vt R ad S. Conſtructio huius problematis eadem eſt q̃ precedẽtis: ſi enim AB ſecetur in C, ita vt A C ad C B, rationẽ habeat vt R ad S, punctum C problemati ſatisfaciet: erit enim vt AC ad CB, ita quadratũ AC ad rectangulum ACB propter eandem altitudinem AC, ſed AC ad CB, eſt ſicut R ad S, ex conſtructione, ergo vt R ad S, ita erit quadratum A C ad rectangulum A CB, punctum igitur C problemati ſatisfacit, quare factum eſt quod oportebat.

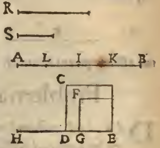
Problema XXXV.

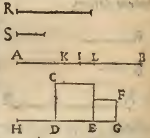
DATAM rectam lineam ita ſecare, vt quadratum alterius partis ad quadratum differentiæ partium, rationem habeat datam.

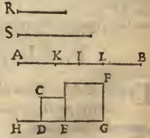
Hoc Problema duos caſus habet: vel enim datam rectam lineam ſecare oportet, vt quadratũ partis maioris, vel partis minoris ad quadratum differentiæ partium, rationem habeat da-

tam : primó caſu oportebit datam rationē, eſſe maioris nempe ad minus: pars enim maior, maior eſt quam partiū differentia. Secundus caſus non indiget determinatione, pars enim minor poteſt eſſe maior prædicta differentia, & etiam minor.

Sit igitur data recta linea A B q̃ oportet ita ſecare, vt quadratū alterius partis, ad quadratum differentiæ partium rationē habeat vt R ad S. Exponat̃ aliquod quadratum CDE, & fiat vt R ad S, ita quadratū CDE, ad aliud quadratum quod ſit F G E, & ED duplicetur in H, ipſa autē A B ſecetur bifariā in I, & fiat vt HG ad GE, ita AI ad IK: ergo in prima figura quæ ad primum caſum pertinet, erit componendo, in ſecūda verò & tertia, quæ pertinent ad ſecundum caſum, erit diuidēdo, vt HE ad GE, ita Ak ad Ik, & duplatis conſequentib. vt HE ad duplā GE, ſeu quod idem eſt vt DE, quæ eſt dimidia ipſius HE ad GE ſimplā, eſt.n. eadē ratio totius ad totum quæ dimidij ad dimidiū, ita erit Ak ad duplam IK quæ ſit LK: quare vt quadratum DE ad quadratum G E, ita erit quadratum Ak ad Lk quadratū, ſed quadratum DE ad quadratū GE, eſt ſicut R ad S, ex cōſtructione, ergo vt R ad S, ita erit quadratum AK ad quadratum Lk, differētię videlicet partium A k, k B, cum enim A I, I B ſint æquales, & æquales quoque L I, I K, fiunt & AL, KB æquales, & ideo differētia inter AK, KB, eſt Lk. Secta eſt igitur AB in k, & impleta Problematis conditio.

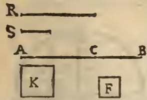






Problema XXXVI.

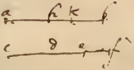
DATAM rectam lineam ita ſecare, vt partium quadrata datam teneant rationem.



Sit data recta linea A B ſecāda in duas partes, ita vt partium quadrata rationē teneant vt R ad S. Exponatur aliquod quadratū k, & fiat vt R ad S, ita k quadratum ad aliud quadratū quod ſit F. Deinde ſecet AB in C, vt ſit A C ad CB, ſicut latus quadrati k ad quadrati F latus. Quoniam igitur eſt vt AC ad CB, ita latus quadrati K ad quadrati F latus, erit vt quadratum AC ad quadratū CB, ita k quadratum ad F quadratū, ſed k quadratum ad F quadratum, eſt ſicut R ad S, ex conſtructione, ergo vt R ad S, ita erit quadratum AC ad CB quadratum. Secta eſt igitur AB in C, vt facere oporrebat.

Problema XXXVII.

DATAM rectam lineam ita ſecare, vt partium quadrata ſimul ſumpta ad rectangulum ſub partibus, rationem habeant datam. Oportet autem datæ rationis terminum primum non eſſe minorem duplo ſecundi: minimū enim aggregatum quadratorum duplum eſt rectāguli ſub partib. maximi, hoc aūt accidit quando data linea ſecta eſt bifariā.

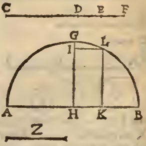


Sit data recta linea AB quam oportet, ita ſecare, vt partium quadrata ſimul ſumpta ad rectangulum ſub partibus rationem habeant vt CD ad DE, cuius rationis terminus CD non ſit minor duplo ipſius DE. Secetur AB bifariā in H, & in ea deſcribatur ſemicirculus AGB, ipſiq; AB ducatur perpendicularis HG, & DE duplicetur in F, & fiat vt CF ad EF, ita quadratum AB ad aliud quadratum cuius latus ſit Z: quadratum igitur AB nō erit minus quādruplo, quadrati Z, quia & CF non eſt minor quam EF quadrupla, ergo ipſa AB non erit minor duplo lateris Z, & conſequenter HG, dimidia videlicet ipſius AB non minor q̄ Z.

I 2 Sumatur

Sumatur ergo in HG ipſi Z, æqualis HI, & per I agatur ipſi AB parallela IL, & ad AB demittatur perpendicularis Lk, erit igitur Lk æqualis IH, hoc eſt ipſi Z. Et Quoniam eſt vt CF ad EF, ita quadratum AB ad quadratum Z, hoc eſt ad quadratum L k: ſeu quod idem eſt ad rectangulũ AKB, duplatis cõſequentib. erit vt CF ad DF, ita quadratum AB, hoc eſt * aggregatum quadratorum A k, KB vnà cum duplo rectanguli AkB ad duplum rectanguli A K B, & diuidendo erit vt CD ad DF, ita aggregatum quadratorum Ak, KB ad duplum rectanguli AKB, & ſubduplatis cõſequentib. erit vt CD ad DE, ita aggregatum quadratorũ AK, kB ad rectãgulũ AkB. Secta eſt igitur AB in K, vt facere oportebat.

4 Secũdi.

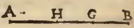


LEMMA. 17

REctangulum ſub aggregato, & differentia duorum laterum æquale eſt exceſſui quadratorum à lateribus.

Sint duo latera, A G maius, G B minus, ipſi autẽ GB ponatur æqualis GH, differẽtia igitur laterũ AG, GB erit AH. Dico rectãgulũ BAH æquale eſſe exceſſui quadratorum AG, GB. Quoniam enim HB ſecta eſt bifariam in G, & ei adiecta HA, rectangulũ BAH, vna cum quadrato GB * æquale erit quadrato AG, auferatur vtrinque quadratum GB, reliquum igitur rectangulum B A H æquale erit exceſſui quadratorum AG, GB, quod erat demonſtrandum.

6 Secũdi.

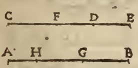


Problema XXXVIII.

DATAM rectam lineam ita ſecare, vt partium quadrata ſimul ſumpta ad rectangulum ſub ipſis, & differentia partium, rationem habeant datam. Oportet autem datam rationem eſſe maioris ad minus: quadrata enim partium

ſimul

ſimul ſumpta maiora ſunt rectangulo ſub tota, & differentia partium, quandoquidem illud rectangulum ex anteced. Lem. æquale eſt exceſſui quadratorum.



Sit igitur data recta linea AB quã oportet ſecare in duas partes, vt partium quadrata ſimul ſumpta ad rectangulum ſub tota, & differentia partium rationem habeãt vt CD ad DE, quorum terminorum rationis CD ſit maior quam DE. Sumatur in CD ipſi DE æqualis DF, & * ſecetur AB in G, vt quadratum AG ad quadratum GB rationem habeat eandẽ, quam habet CE ad CF, ipſi autem GB ponatur æqualis GH, erit igitur per conuerſionem rationis, vt quadratum AG ad exceſſum quadratorum AG, GB, hoc eſt ad * rectangulum BAH, ita CE ad FE, & duplatis antecedentibus, vt duplum quadrati AG, hoc eſt * vt aggregatum quadratorum AG, GB, vnà cum rectangulo BAH, ad rectangulum BAH, ita erit dupla CE ad FE, hoc eſt ad duplã DE, & ideo ita CE ſimpla ad ſimplam DE: eſt enim eadem ratio dupli ad duplum quæ ſimpli ad ſimplũ, ergo diuidendo erit aggregatum quadratorum AG, GB ad rectangulum BAH, ſicut CD ad DE, Secta eſt igitur AB in duas partes AG, GB quarum partium quadrata ſimul ſumpta ad rectangulum ſub tota AB, & differentia partium AG, GB, rationem habent vt CD ad DE, quod facere oportebat.

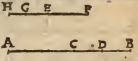
35. Huius. — *Ex antec. Lem.*

At verò duplum quadrati AG æquale eſſe aggregato quadratorum AG, GB, vnà cum rectangulo BAH, ſic demonſtrabitur. Quoniam enim quadratum AG æquale * eſt rectangulo BAH, vnà cum quadrato GB, addito communi quadrato AG, duplũ quadrati AG æquale erit aggregato quadratorum AG, GB, vnà cum rectangulo BAH, quod erat demonſtrandum. *6 Secũdi.*

Problema XXXIX.

DATAM rectam lineam ita ſecare, vt partium quadrata ſimul ſumpta ad totius lineæ quadratum, rationem habeant datam. Oportet autem datæ rationis terminum ſecundum, maiorem eſſe primo, non autem duplo primi: qua-

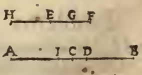
dratum enim totius lineæ maius eſt quadratis partium, duplo autem ipſorum quadratorum non eſt maius.



Sit AB data recta linea ſecanda in duas partes, vt partiũ quadrata ſimul ſumpta, ad quadratum totius AB rationẽ habeant vt EF ad FG, cuius rationis terminus FG ſit maior quam EF, non autem quam duplum ipſius EF. Duplicetur FE in H, & ſecetur AB bifariam in C, & fiat vt FG ad GH, ita quadratum AC ad quadratum CD, ergo conuertendo erit vt HG ad GF, ita quadratum CD ad AC quadratum, & componendo vt HF ad GF, ita aggregatum quadratorum AC, CD ad AC quadratum, & duplatis conſequentib. vt HF ad GF duplã, hoc eſt vt EF ad GF, (eſt enim eadẽ ratio dimidij ad dimidium quæ totius ad totũ,) ita erit aggregatum quadratorum AC, CD ad duplum quadrati AC, & ita duplum quadratorum AC, CD ad quadruplũ quadrati AC, hoc eſt ad quadratum AB, ſed duplum quadratorum
9. Secũdi. AC, CD æquale * eſt quadratis AD, DB, vt igitur EF ad FG, ita erit aggregatum quadratorum AD, DB ad AB, quadratũ. Secta eſt igitur AB in duas partes AD, DB, quarum quadrata ſimul ſumpta ad quadratum totius AB, rationẽ habent vt EF ad FG, quod erat faciendum.

Problema XL.

DATAM rectam lineam ita ſecare, vt partium quadrata ſimul ſumpta, ad quadratum differentiæ partiũ datam habeant rationem. Oportet autem datam rationem eſſe maioris ad minus.



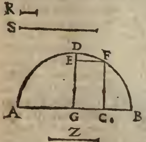
Sit data recta linea AB ſecanda in duas partes, vt partiũ quadrata ſimul ſumpta ad quadratũ differẽtiæ partium rationem habeant vt EF ad FG, quæ ratio ſit maioris ad minus. Duplicet̃ FE in H, & AB ſecetur bifariã in C, & fiat vt HG ad GF, ita quadratum AC ad quadratũ CD, ipſi aũt CD ponatur æqualis CI.

Quoniam

Quoniam igitur AC, CB ſunt æquales, & æquales quoque IC, CD, fiunt & reliquæ AI, DB æquales, quare differentia partium AD, DB erit ID: Et q̃m eſt vt HG ad GF, ita quadratum AC ad CD quadratum, erit componendo vt HF ad GF, ita aggregatũ quadratorum AC, CD ad quadratũ CD, & duplatis conſequẽtibus vt HF ad duplam GF, hoc eſt vt EF ad GF, (eſt enim eadẽ ratio dimidij ad dimidiũ quæ totius ad totũ) ita erit aggregatũ quadratorũ AC, CD ad duplum quadrati CD, & ita duplũ quadratorũ AC, CD ad quadruplũ quadrati CD, hoc eſt ad quadratũ ID, ſed duplũ quadratorũ AC, CD ęquale* eſt quadratis AD, DB, vt igitur EF ad FG, ita erit aggregatũ quadratorũ AD, DB ad quadratum ID. Secta eſt igitur AB in D, vt facere oportebat.

Problema XLI.

DATAM rectam lineam ita ſecare, vt rectangulum ſub partibus ad quadratum totius lineæ, datã habeat rationem. Oportet autem datæ rationis, terminum ſecundum non eſſe minorem quadruplo primi: quadratum enim totius lineæ quadruplum eſt rectanguli ſub partibus maximi, hoc autem accidit quando linea data ſecta eſt bifariam.



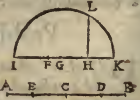
Sit igitur AB data recta linea ſecanda in duas partes, vt rectangulũ ſub partib. ad quadratũ totius AB rationẽ habeat vt R ad S, cuius rationis terminus S, non ſit minor quadruplo ipſius R. Secetur AB bifariã in G, & in ea deſcribatẽ ſemicirculus ADB, à pũcto aũt G ducatur ipſi AB perpendicularis GD, & fiat vt S ad R, ita quadratum AB ad aliud quadratum cuius latus ſit Z. Q̃m igitur S nõ eſt minor quadruplo ipſius R, quadratũ AB non erit minus quadruplo quadrati Z, neque ideo recta AB minor, erit duplo lateris Z, nec denique GD, hoc eſt dimidia AB minor erit q̃ Z, ſumatẽ ergo in GD ipſi Z ęqualis GE, & ipſis AB, DG parallelæ agantur EF, FC, erit igitur FC, æqualis EG, hoc eſt ipſi Z. Et q̃oniam eſt vt S ad R, ita

quadratum

quadratum AB ad quadratum Z, hoc eſt ad FC quadratum, ſeu quod idem eſt ad rectangulũ ACB, erit conuertendo vt R ad S, ita rectangulum ACB ad AB quadratum. Secta eſt igitur AB in G, vt facere oportebat.

Problema XLII.

DATAM rectam lineam ita ſecare, vt rectangulum ſub partibus ad quadratum differentiæ partium, datam habeat rationem.



Sit data recta linea AB ſecanda in duas partes, vt rectangulum ſub partib. ad quadratũ differentiæ partium rationẽ habeat vt FG ad GH. Secetur AB bifariam in C, & duplicetur GH in K, ipſa verò GF quadruplicetur in I, & in Ik deſcribatur ſemicirculus ILk, à puncto aũt H excitetur ad IK perpendicularis HL, & fiat vt IH ad HL, ita AC ad CD, ipſiq; CD ponatur æqualis CE. Quoniam igitur æquales ſunt AC, CB, & æquales quoque EC, CD, fiunt & reliquæ AE, DB æquales, quare differentia ipſarum AD, DB erit ED. Et qm̃ eſt vt IH ad HL, ita AC ad CD, erit vt quadratum IH ad quadratum HL, ita quadratum AC ad CD quadratum, ſed quadratũ IH ad quadratum HL, eſt vt IH ad Hk: eſt enim * vt quadratum primæ trium proportionalium ad quadratũ ſecundæ, ita prima ad tertiam, vt igitur IH ad HK, hoc eſt ad HG, ita erit quadratum AC ad quadratum CD, & diuidẽdo erit vt IG, hoc eſt vt quadrupla FG ad GH, ita exceſſus quadratorum AC, CD ad quadratũ CD, & quadruplatis conſequentib. vt FG quadrupla ad GH quadruplam, ſeu quod idem eſt vt FG ſimpla ad ſimplam GH: eſt enim eadem ratio vtrobique, ita erit exceſſus quadratorum AC, CD ad quadruplum quadrati CD, hoc eſt ad quadratum ED, ſed exceſſus quadratorum AC, CD æqualis eſt rectangulo DAE, hoc eſt ADB ex Lemmate in Prob. 37, ergo vt FG ad GH, ita erit rectangulum ADB ad quadratũ ED. Secta eſt igitur AB in duas partes AD, DB ſub quibus rectangulum ADB ad quadratũ differentiæ ipſarum rationem habet vt FG ad GH, quod erat faciendum.

Coroll. 2. 20. Sexti.

FINIS.